2017학년도 7월 정현경 모의고사 해설
(가 형)

1.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x=\frac{1}{2}$

2.

두 벡터가 이루는 각을 θ라 하면,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta=1$

3.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$

4.

표준편차= $\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}}=1$

5.

$\frac{1}{2}\log_2(2x-2)\geq\log_4(x^2-3x+2)$에서

$\frac{1}{2}\log_2(2x-2)=\log_4(2x-2)$이므로

$2x-2\geq x^2-3x+2,\quad x^2-5x+4\leq 0\ \rightarrow\ x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 인데,

$x=1,\ 2$는 로그의 정의에 부합하지 않으므로 $x=3,\ 4$이다.

6.

$t=1$일 때, $x=1,\ y=3$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+6}}}{3t^2+3}$에 $t=1$을 대입하면 구하는 직선의방정식은

$y=\frac{1}{9}x+\frac{26}{9}$이다. $\therefore 2a+b=\frac{28}{9}$

7.

건우와 민재를 포함한 팀을 구성하는 방법의 수 ${}_8\mathrm{C}_3$

나머지 5명의 팀을 구성하는 방법의 수 ${}_5\mathrm{C}_5$

$\therefore {}_8\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_5=56$

8.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+x+\frac{1}{4}=1$에서 $x=\frac{1}{8}$

$\mathrm{E}(X)=\frac{17}{8}$

9.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로

$2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

인데, $\mathrm{P}(A\cap B)$는 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$보다 작거나 같으므로,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

이다. 따라서, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이다.

10.

$1+\sin x=t$라 하면,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1+\sin x)dx=\int_1^2 t dt=\frac{3}{2}$

11.

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4}+by=1$

인데, 이 직선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로 $a=1$이고 $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$\therefore a^2+b^2=\frac{7}{4}$

12.

$y''=(x+2)e^x$이므로 곡선 $y=xe^x$의 변곡점은 $(-2,\ -2e^{-2})$이고

$y'=(x+1)e^x$이므로, 구하는 직선의 방정식은

$y=-e^{-2}(x+2)-2e^{-2}$

이다. 이 직선의 y절편은 $-\frac{4}{e^2}$이다.

13.

세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$의 크기의 최댓값은 각각 1이므로, 세 벡터의 방향이 같고 각각의 크기가 1일 때

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}|$

은 최댓값 3을 가진다.

14.

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로 두 평면 ABC, α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

한편, 점 A에서 선분 BC의 중점에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{3}$이므로, 점 A와 평면 α사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.

15.

여사건을 이용해보자.

ab가 3의 배수가 아니라면 a와 b가 각각 3, 6이 아니므로 ab가 3의 배수가 아닐 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

16.

곡선 $y = \log_a x$와 x축이 만나는 점의 x좌표는 1이므로 세 점 A, B, C의 좌표는

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 1),\ \mathrm{C}(2,\ 1)$$

이다. 따라서 $\log_a 2 = 1$이므로 $a = 2$이고 곡선 $y = \log_a x$와 두 선분 AB, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$1 - \int_1^2 \log_2 x dx = -1 + \frac{1}{\ln 2}$$

이다.

17.

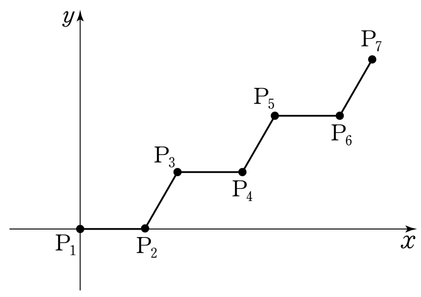
$$\mathrm{P}(X=0) = {}_n\mathrm{C}_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \mathrm{P}(X=n) = {}_n\mathrm{C}_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

인데, $\mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=n) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^6}$이므로, $n = 7$이다.

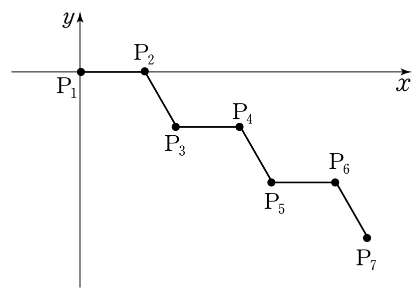
18.

문제의 조건에 따르면, 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 점 P_n은 n이 증가함에 따라 x좌표가 증가하는 방향으로 움직인다.

한편, $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_7}\right|$가 최대이려면 점 P_n은 y좌표가 모두 증가하거나 감소하는 방향으로 움직여야 한다. 즉,



또는



이다. 두 경우 모두 $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_7}\right| = \sqrt{3}$이다.

19.

포물선 $y^2 = 4x$의 준선이 $x = -1$이므로, 점 A와 점 P사이의 거리는 점 A와 준선까지의 거리인 $r+1$과 같다. 따라서 점 F와 점 P사이의 거리의 최댓값은

$$2r + 1 = 2$$

이므로, $r = \frac{1}{2}$이고, 점 A의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

20.

$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$는 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$가 한 변의 길이가 2인 사면체이고,

$$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_4} = \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4} = \overline{\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4} = r + 1$$

이므로, 점 O_4의 평면 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$에 내린 정사영은 삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$의 무게중심이다. 따라서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 중점을 M이라 하면, 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{MO}_4} = \sqrt{r^2 + 2r}$$

이고, 삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$의 무게중심을 G라 하면 $\overline{\mathrm{MG}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{GO}_4} = \sqrt{r^2 + 2r - \frac{1}{3}}$$

이다.

$$\therefore \tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{GO}_4}}{\overline{\mathrm{MG}}} = \frac{\sqrt{r^2 + 2r - \frac{1}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{23} \ \rightarrow \ r = 2$$

21.

$x \ge a$일 때, $f(x) = f'(x)$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| = x + C$$

$$\therefore f(x) = \pm e^{x+C}$$

$x < a$일 때, $f(x) = x\{f(x)\}^2$이므로

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

이다. $f(x)$는 미분가능한 함수 이므로,

$$f(a) = \pm e^{a+C} = \frac{1}{a},$$

$$f'(a) = \pm e^{a+C} = \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}$$

에서, $a = -1$임을 알 수 있고,

$$f(a) = \pm e^{-1+C} = -1$$

이므로, $c = 1$이고 $x \ge 1$일 때 $f(x) = -e^{x+1}$이다.

$$\therefore f(3a) = f(-3) = -\frac{1}{3}$$

22.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2} = k \rightarrow 10k = 15$$

23.

$${}_5\mathrm{P}_3 + {}_4\mathrm{P}_2 = 72$$

24.

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = k$에서 $\frac{x^2}{-5k} - \frac{y^2}{-4k} = -1$이므로, 쌍곡선의 한 초점의 좌표는 $(0,\ \sqrt{-9k})$이다.

$$\therefore k = -4,\ k^2 = 16$$

25.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x \to 0} \frac{f(kx) - f(0)}{x} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$이므로,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n(2n+1)}{2}}{n^2} = 2$$

26.

(가) 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 주기는 4π이므로, $b = \frac{1}{2}$이고,

(나) 조건에 의하여 $a = 3,\ b = 1$이다.

$$\therefore 10(a+b+c) = 45$$

27.

(나)조건에 의하여

$$a = -b,\ c = -d,\ e = -f$$

이고, $|a| = A+1,\ |c| = C+1,\ |e| = E+1$이라 하면
(가)조건에서

$$A + B + C = 4$$

이다. 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이고,

a와 b의 부호
c와 d의 부호
e와 f의 부호

는 서로 뒤바뀔 수 있으므로, 모든 경우의 수는

$$8 \times {}_3\mathrm{H}_4 = 120$$

이다.

28.

직선 $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$가 y축과 만나는 점을 $\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{3})$라 하자. 점 Q에서 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$에 내린 수선의 발을 H'이라 하면,

$$\overline{\mathrm{QH}'} = \sqrt{2}$$

이므로, 두 직선 $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3},\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$이 만나는 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{QR}} : \overline{\mathrm{PQ}} = 1 : 2$이고, 두 직선이 이루는 예각을 θ라 하면

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

이므로, $\overline{\mathrm{QR}} = 3\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = 6\sqrt{2}$이다. 직선 $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$이 x과 이루는 예각의 크기를 α라 하면 $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$이므로, 점 P와 x축 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OQ}} + 6\sqrt{2} \times \sin\alpha = 5\sqrt{3}$이다.

$$l^2 = 75$$

29.

점 A를 지나고 평면 α와 수직인 직선이 평면 α와 만나는 점을 A', 점 B를 지나고 평면 α와 수직인 직선이 평면 α와 만나는 점을 B'이라 하자.

한편, 점 O에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 PQ의 중점이고

$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}$$

이므로 점 A'에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 A'', 점 B'에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 B''이라 하면,

$$\overline{\mathrm{AB}}=8$$

이므로 $\overline{\mathrm{A'A''}}+\overline{\mathrm{B'B''}}=4\sqrt{3}$이다. 점 A와 직선 PQ사이의 거리는

$$\sqrt{\overline{\mathrm{A'A''}}^2+(4\sqrt{3})^2}=5\sqrt{3}$$

이므로 $\overline{\mathrm{A'A''}}=3\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{B'B''}}=\sqrt{3}$이므로 점 B와 직선 PQ사이의 거리는

$$\sqrt{\overline{\mathrm{B'B''}}^2+48}=\sqrt{51}$$

이다.

30.

$f(0)=e^d=e$이므로 $d=1$이다.

한편, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $f(x)>f'(x)$이면

$$\int_{f'(x)}^{f(x)}f(t)dt>0$$

이고 $f(x)=f'(x)$이면

$$\int_{f'(x)}^{f(x)}f(t)dt=0$$

이고 $f(x)<f'(x)$이면

$$\int_{f'(x)}^{f(x)}f(t)dt<0$$

이다. $f(x)=e^{x^4+ax^3+bx^2+cx+1}$이고

$$f'(x)=(4x^3+3ax^2+bx+c)e^{x^4+ax^3+bx^2+cx+1}$$

이므로

$$f(x)-f'(x)=(-4x^3-3ax^2-bx-c+1)e^{x^4+ax^3+bx^2+cx+1}$$

인데, $e^{x^4+ax^3+bx^2+cx+1}>0$이므로 함수 $f(x)-f'(x)$의 부호는

$$-4x^3-3ax^2-2bx-c+1$$

의 부호와 같다. 곡선 $y=-4x^3-3ax^2-2bx-c+1$은 항상 제 2사분면과 제 4사분면을 지나므로, 곡선 $y=\int_{f'(x)}^{f(x)}f(t)dt$도 제 2사분면과 제 4사분면을 지난다. 따라서 곡선 $y=\int_{f'(x)}^{f(x)}f(t)dt$은 원점을 지나야 하므로,

$$f(0)=f'(0)\rightarrow c=1$$

이다. 따라서

$$-4x^3-3ax^2-2bx-c+1=x(-4x^2-3ax-2b)$$

이고, 곡선 $y=-4x^2-3ax-2b$는 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 하므로, 판별식을 이용하면

$$9a^2-32b\le 0\rightarrow b\ge\frac{9}{32}a^2$$

이다. 한편, 문제에서 구하는 값은 $a+b+c+d$의 최솟값 인데, c와 d는 상수이므로 $a+b$의 최솟값을 구하면 된다.

x축이 a, y축이 b로 치환된 좌표평면을 생각해보자. $a+b=k$라 하면 곡선 $b=\frac{9}{32}a^2$에 직선 $b=-a+k$이 접할 때, $a+b$는 최솟값 k를 가진다.

$b=\frac{9}{32}a^2$을 a에 대하여 미분하면

$$\frac{db}{da}=\frac{9}{16}a=-1$$

에서 $a=-\frac{16}{9}$이고 $b=\frac{8}{9}$이다. 따라서 $a+b+c+d$의 최솟값은 $\frac{10}{9}$이고, $p^2+q^2=181$이다.