도형

※ 가장 중요한 생각

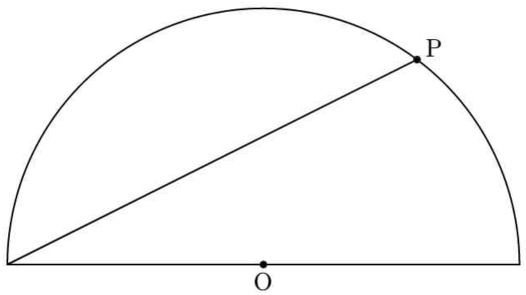
“이거 한다고 답이 나올까?”라는 생각이 들면 일단 해보자!

각의 크기, 변의 길이, 보조선 등등 **당연히** 해야하는 것들이 있으면 **당연히** 하기. **당연**하지만 **당연**한지 모르기 때문에 **당연히** 안 하는 것!

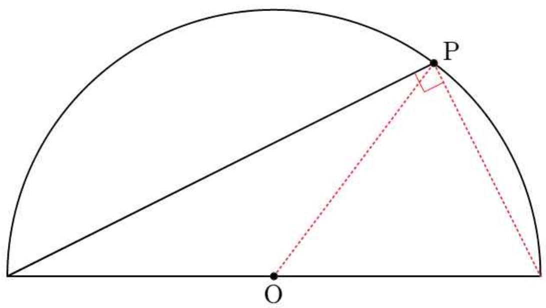
문제를 풀기 위해 도형을 볼 때부터 견적이 나와야 한다!

원

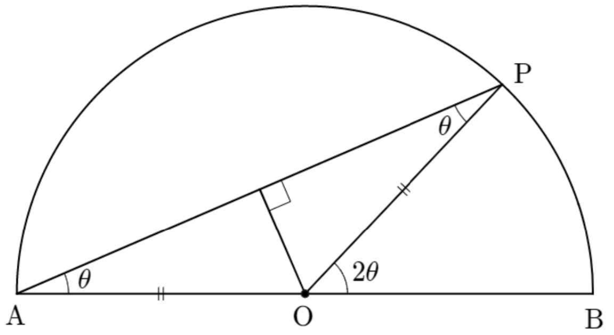
원에서 가장 중요한 것은 중심과 반지름이다. 이유는 원의 정의 자체가 ‘한 정점으로부터 거리가 같은 점들의 자취’이기 때문이다.



이런 상황에서 우리가 반드시 해야할 행동은? 도형에서 뭘 어떻게 해야할지 모르겠다면 그 특정한 점이 어디서부터 생겼는지 판단해보자. 점 P는 원 위의 점이다. 따라서 원의 성질을 이용하려고 해야한다.



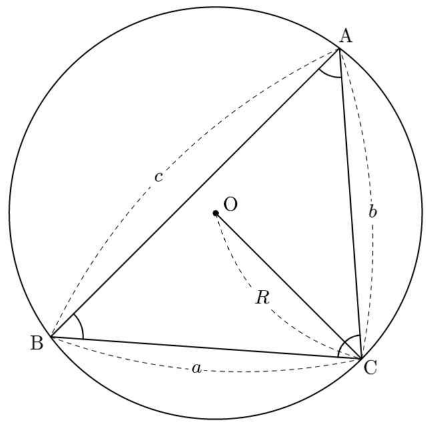
① 점 P에서 중심 O까지 반지름 긋기
② 점 P에서 다른 지름의 끝점까지 선분 이어주기
③ **직각** 표시하기



현의 이등변삼각형의 성질 꼭 알아두자. 무조건 표시해 두어야 한다. 문제에 쓰이든 말든 상관이 없다. 일단 해놔야 보인다.

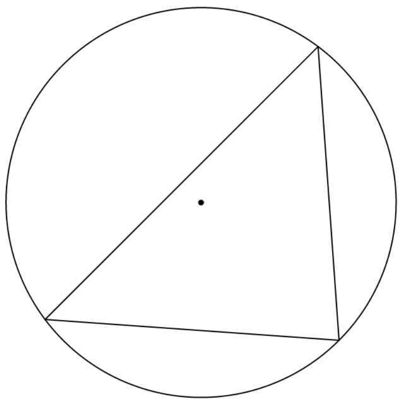
사인법칙

사인법칙 : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



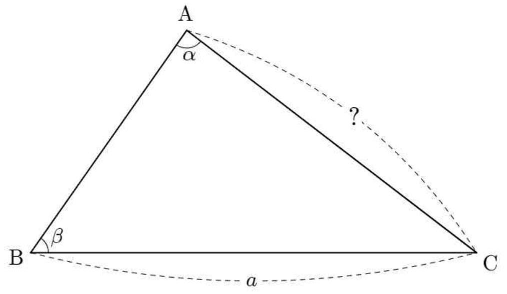
언제 사인법칙을 사용하는가?

① 삼각형과 외접원이 함께 있을 때, 일단 쓴다.

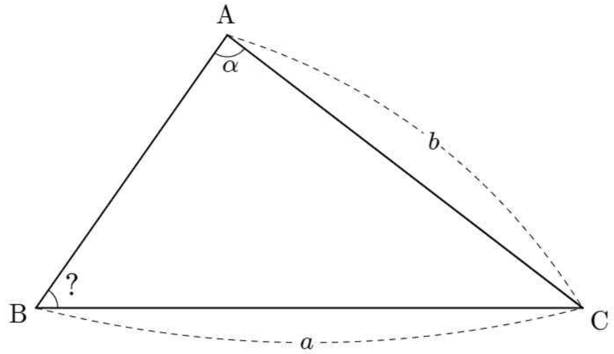


$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$ 이용

② 한 삼각형에서 두 쌍 이상의 마주보는 각과 변이 있을 때, 일단 쓴다.

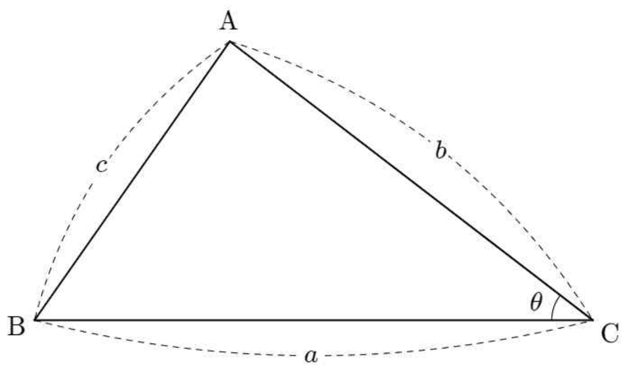


⇒ $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{?}{\sin\beta}$를 통해 ?를 구할 수 있다.



⇒ $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin?}$를 통해 $\sin?$를 구할 수 있다.

제2 코사인법칙

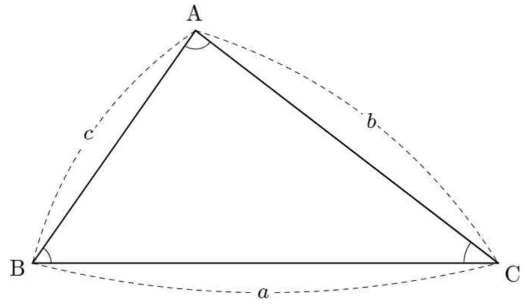


$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

항상 θ가 예각인지 둔각인지 판단하는 습관을 가질 것!

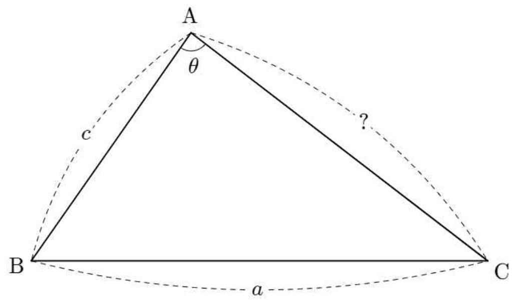
언제 '제2 코사인법칙'을 사용하는가?

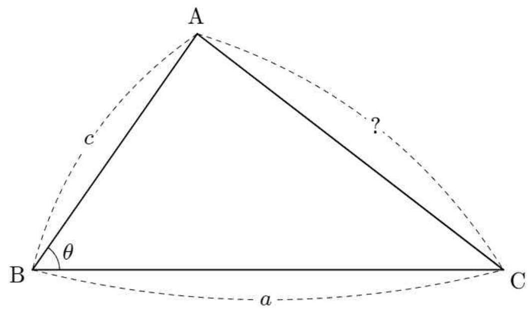
① 삼각형의 세 변의 길이를 모두 알고 있을 때, 일단 쓴다.



⇒ ∠A, ∠B, ∠C에 대한 삼각비를 모두 알 수 있다.

② 삼각형의 두 변의 길이와 하나의 각을 알 때, 일단 쓴다.



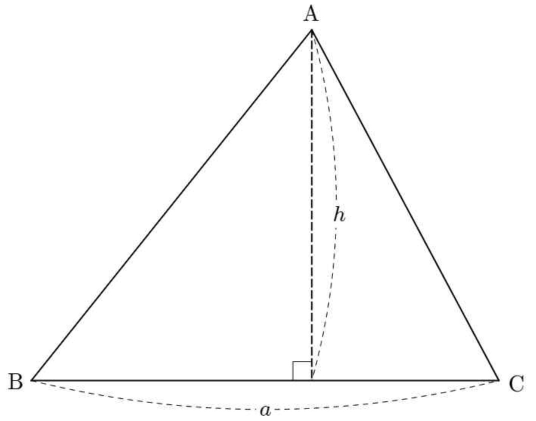


⇒ 두 경우 모두 코사인법칙을 통해 ?의 값을 구하거나 표현할 수 있다.

삼각형의 넓이

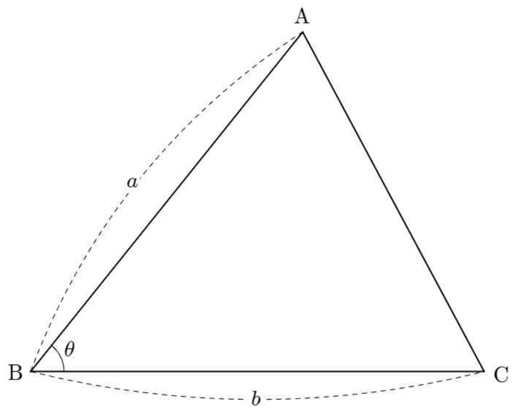
삼각형의 넓이를 구하는 방법은 다음과 같이 5가지로 구분되며 어떻게든 이 방법 내에서 문제를 해결하고자 노력한다.

①



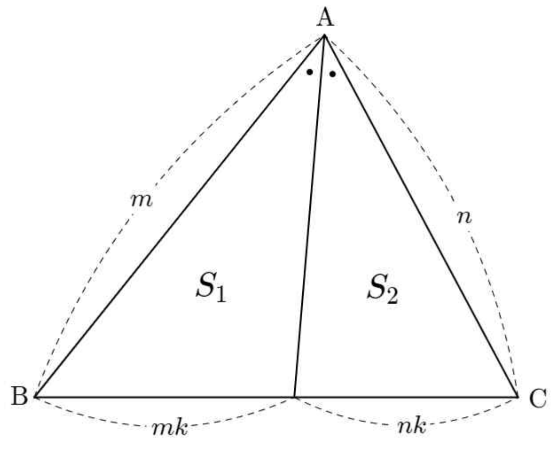
$$S=\frac{1}{2}ah$$

②



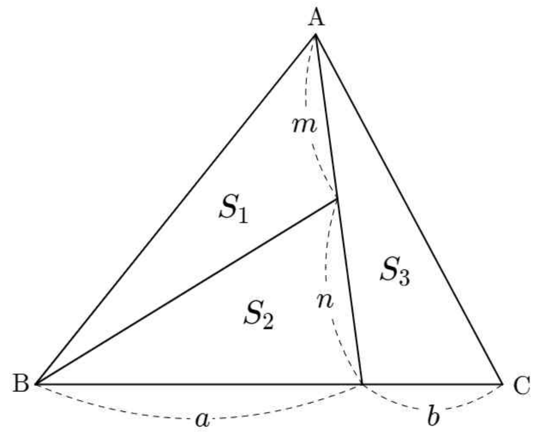
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

③



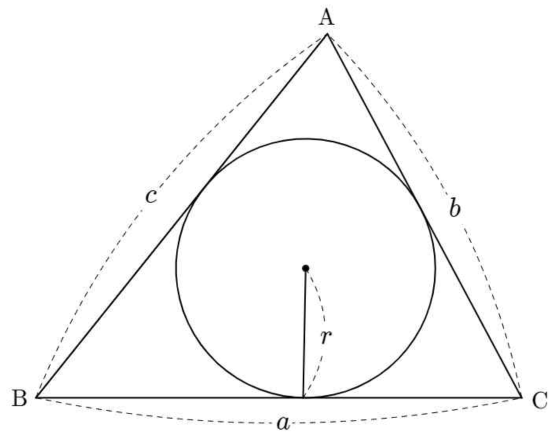
$$S_1=(S_1+S_2)\times\frac{m}{m+n}$$

④



$$S_1=(S_1+S_2+S_3)\times\frac{a}{a+b}\times\frac{m}{m+n}$$

⑤



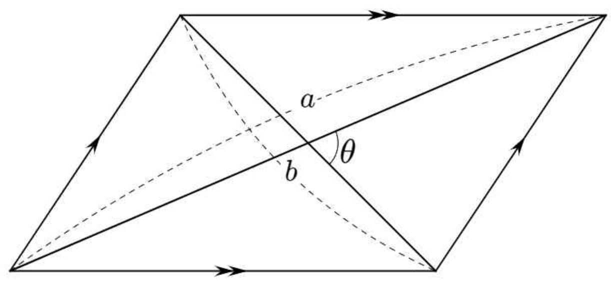
$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

만약 이 5가지 방법을 통해서 못 구하는 삼각형이 있으면 날 찾아와라. 정중하게 사과하겠다.
특히 ④은 미적분 선택자들 삼도극 문제에서 은근 출제되는 유형이다. 물론 사설에서.

n각형의 넓이

항상 삼각형으로 쪼개어 계산한다.

예외)

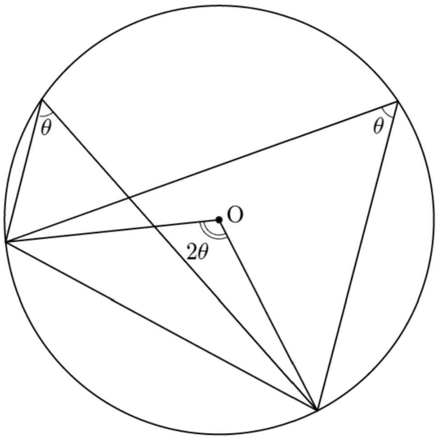


$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

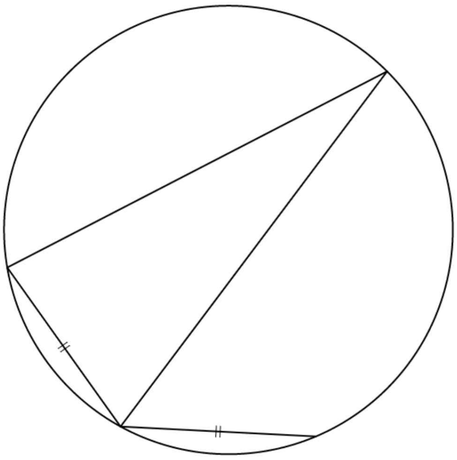
원에 내접하는 도형

① 원주각 & 중심각

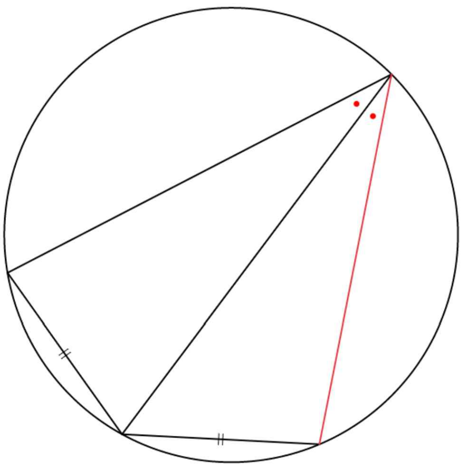
기본중의 기본이다. 원주각과 중심각 사이의 관계는 당연하고 원주각끼리의 관계도 알아야 한다.

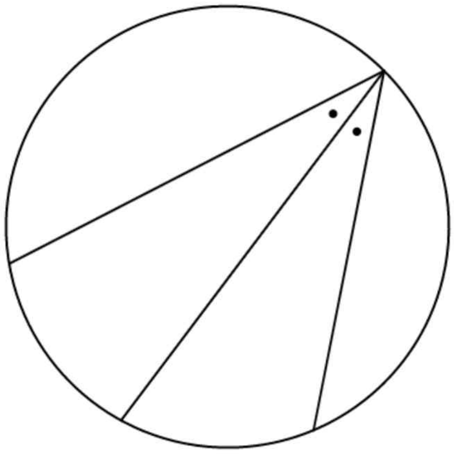


도형이 다음과 같이 주어져 있을 때(검은색), 다음과 같은 행동들(빨간색)을 꼭 하자!

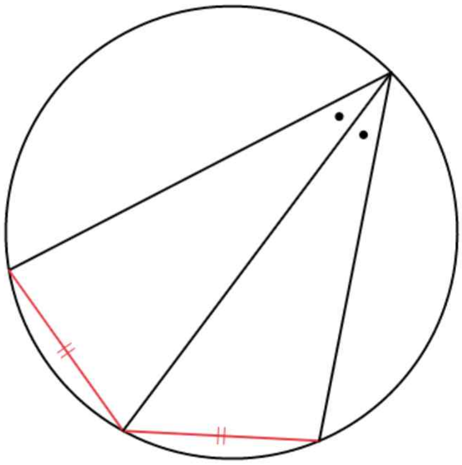


$\Downarrow$

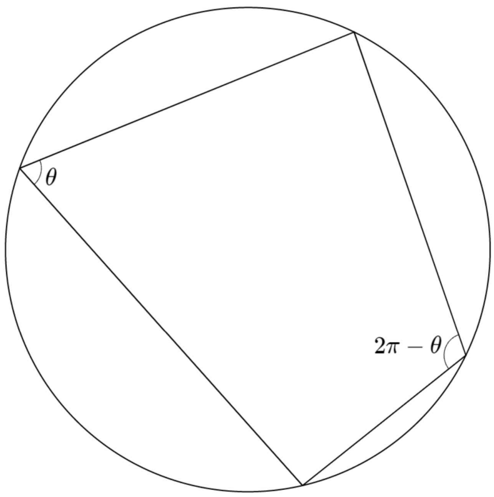




$\Downarrow$

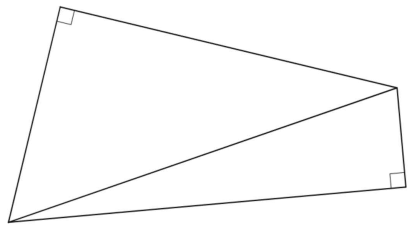


② 원에 내접하는 사각형

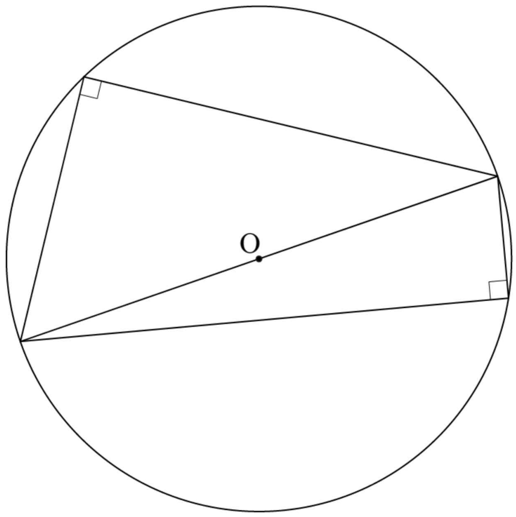


어마무시하게 중요하다. θ를 보면 바로 마주보는 각을 설정해 주어야 한다.

③ 빗변을 공유하는 두 직각삼각형

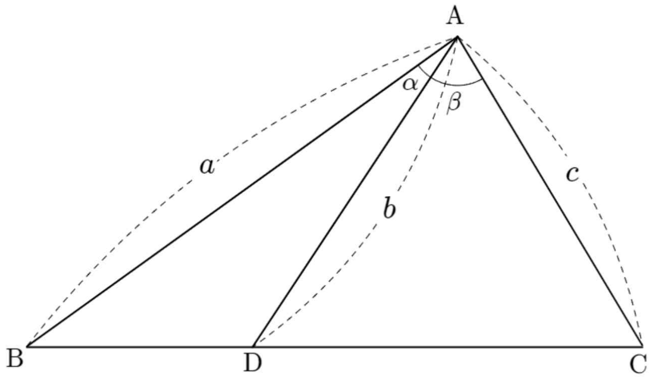


이것도 너무너무너무 중요하다. 보조선을 긋고 안 긋고의 차이가 너무나 극명하게 난다. 꼭 외접원을 그려주도록 하자.



이렇게 외접원을 그려주어야 빗변이 지름으로 보이고, 직각삼각형이 내접하는 삼각형으로 보이게 되어 사인법칙을 이용할 수 있다. 원 없이 이를 인지하기 힘들뿐더러 혹시나 머리가 좋아 떠오르더라도 그리고 안 그리고 차이는 훨씬 클 것이다.

넓이를 이용한 변의 길이 구하기

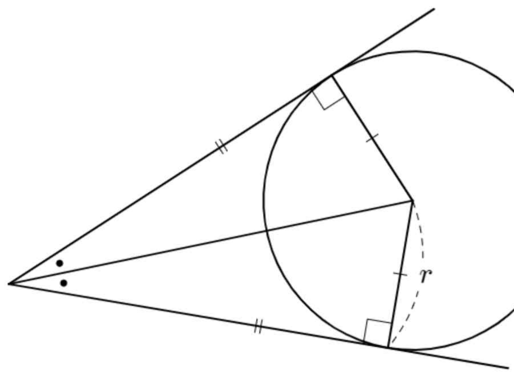


$$\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta$$

이 그림 자체를 외워두어야 한다. 도저히 사인법칙이나 코사인법칙으로 해결할 수 없다는 것이 정해질 때, 문득 이 그림이 생각나야 한다.

원의 접선

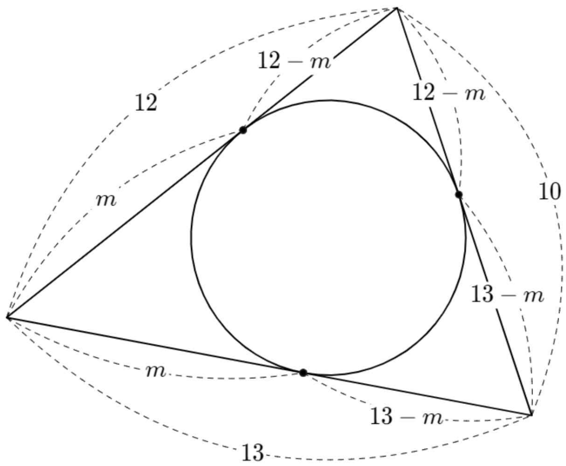
원에 접했다는 소리만 들으면 개처럼 반응해야 한다. 바로 수직 표시하고, 서로 같은 것들 투성이니 전부 표시해주자.



합동인 삼각형 한 쌍이 나타나는 것이 매우 중요하다.

원의 접선의 활용

삼각형의 내접원이 있고 삼각형의 변의 길이를 구해야 하는데 각의 정보가 없거나 무의미하다면 꼭 이 생각을 하자. 정말 중요하다. 이게 될까?싶어도 해보면 나름 풀리는 경우가 많다.



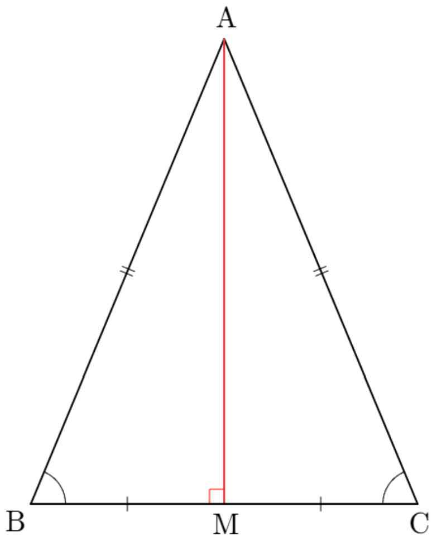
모든 길이를 구할 수 있다.

이등변삼각형

이등변삼각형의 정의를 알면 우리가 무엇을 해야할지 알 수 있다.

‘두 변의 길이가 같은 삼각형’

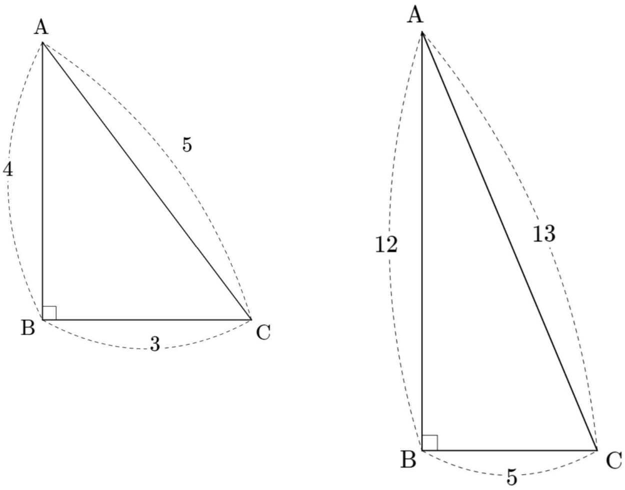
두 변의 길이가 같으므로 밑각이 서로 같다는 것도 이용할 수 있게 된다. 이를 정확히 위해서는 당연히 수선의 발이 필요하다.



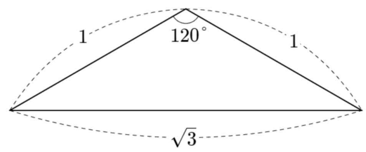
앞으로 문제에서 이등변삼각형이 나오면 할 것은 단 하나이다. 일단 A에서 선분 BC로 수선의 발부터 내리고 같은 것끼리 전부 표시한다.

외우면 좋을 삼각형의 세 변의 길이

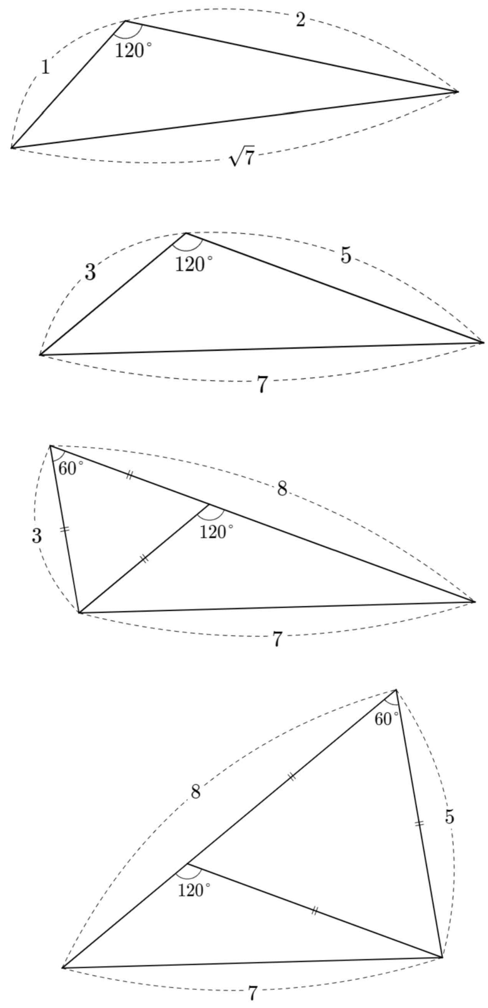
① 피타고라스의 수



② 특수각



③ 코사인법칙 응용



예시

이제부터 설명할 생각들은 다음 두가지 상황에 적용한다.

① 도형을 보자마자
② 도형 문제가 안 풀릴 때

도형을 보자마자 그렇게 풀어야겠다는 생각이 들면 당연히 좋다. 하지만 안 될 수도 있다. 그럼 문제가 안 풀렸을 때, '내가 어떤 걸 안 했지? 조건들을 다시 보고 내가 뭘 할 수 있는지 확인해볼까?'라는 생각이 필요하다.

도형 문제가 안 풀리면 꼭 조건들을 제대로 읽어보고 빠뜨린게 없는지부터 확인하자. 그럼에도 안 풀린다면 내가 지금 당장 진도를 못 빼고 있는 이유에 해당하는 그 변, 그 점, 그 각에 대해서 그 녀석의 출처가 어딘지 생각하자. 만약 원과 직선의 교점인 점 P가 있다고 하자. 점 P를 찾았는데 더 이상 나아갈 수가 없다면 점 P의 정체를 먼저 찾는 것이다.

물론 생각은 전부 해두고 안되거나 필요 없는건 폐기한다.

①

② 원과 직선의 교점이네? (보통 그림이 생성되는 원리를 설명해주는 조건들을 통해 알 수 있다. 또는 그림 그 자체를 통해. 조건들을 읽고 다시 판단해보는 것을 추천한다.)

③ 원이라 원.... 원의 성질이 뭐지? 원의 성질이 뭐지? 내가 안 쓴 원의 성질이 뭐가 있지? 원은 일단 반지름이 중요한데? 반지름부터 그어볼까?

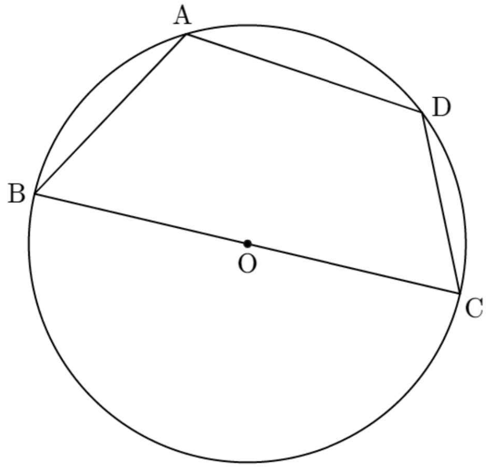
④ 어? 일단 그어봤더니 갑자기 원주각이 보이네? 원주각의 특징이 뭐지? 원주각? 중심각도 이어봐야하나?

⑤ 와 풀렸다!

참 쉽죠?

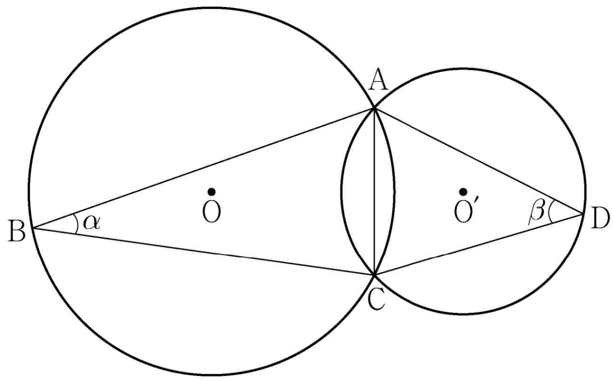
이제 역대 기출문제들의 도형을 보고 뭘 해야할지 알아보자.
그림을 보고 어느 문제인지 떠오를 수 있다면 더더욱 좋다.
너무 쉬운 문제들은 제외하겠다.

01



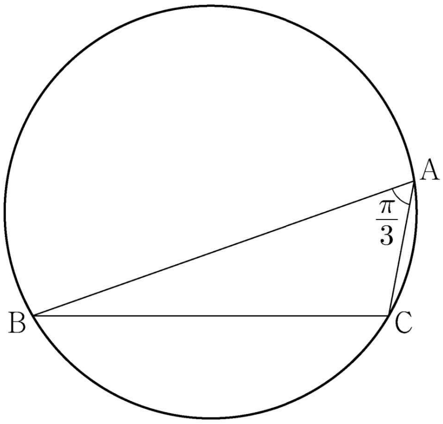
① 원에 사각형이 내접해있네?
당연히 마주보는 각의 합 180도 인정?
② 사각형은 어차피 삼각형으로 쪼갤거니깐 그러면 원에 내접하는 삼각형? 사인법칙?

02



① 원에 내접하는 삼각형? 당연히 사인법칙?
② 굳이 저 각들을 α와 β로 정의해줬네? 저거 누가봐도 원주각 아닌가? 그럼 당연히 중심각도 만들어 봐야하는거 아닌가? O와 연결해볼까?

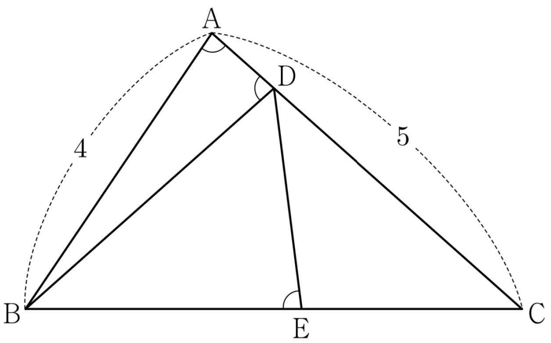
03



① 원에 내접하는 삼각형? 당연히 사인법칙!

② 각 A를 줬어? 그럼 선분 BC의 길이를 구하고, 코사인법칙까지 가능?

04

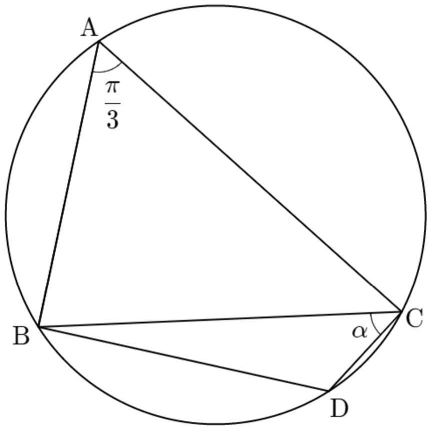


① 보자마자 삼각형 ABD가 이등변삼각형? 당연히 수선의 발

② 두 변의 길이를 알고 각 A를 알아? 당연히 코사인법칙? (사실 이건 문제를 풀 때 처음부터 구하기 보다는 문제 풀이 중간에 선분 BC의 길이를 그리려고 마음 먹을 때 떠올리게 되는게 맞는 순서인 것 같다.)

③ (문제를 풀다보면) 어? 삼각형 BDC도 이등변삼각형? 수선의 발은 못 참지

05



① 원에 내접하는 사각형? 당연히 마주보는 각의 합 180도!

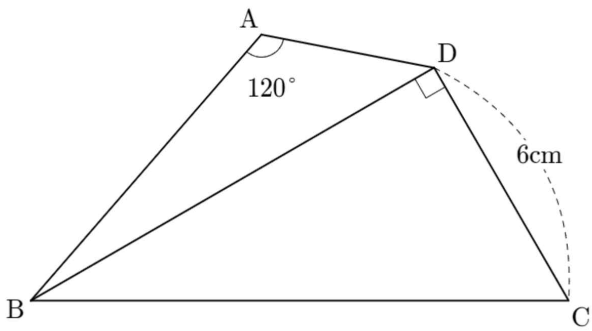
② 사각형을 쪼개면 삼각형인데 원에 내접하는 삼각형? 당연히 사인법칙? 각 A를 아니깐 선분 BC는 자동이네?

③ (문제에서 각 BCD의 크기를 줌) 아니 이건 원주각? 그럼 당연히 중심각...을 하려했는데 원의 중심을 안줬네? 그럼 내가 굳이 해야돼?

④ 삼각형 BCD는 원에 내접하는데 선분 BD를 구해야돼? 당연히 사인법칙 아니야?

⑤ 거기에 한술 더 떠서 선분 CD도 구해? 이미 두 변을 알고 한 각의 크기도 아는데? 당연히 코사인법칙 아니야?

06



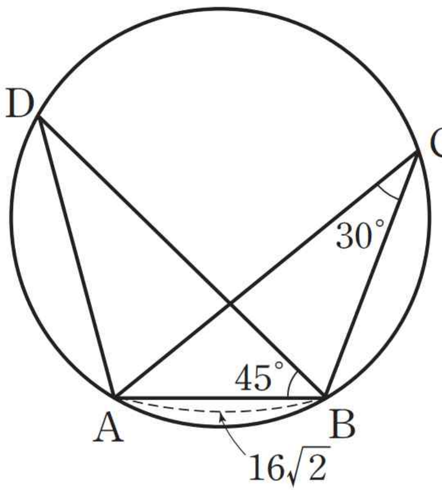
(단, 사각형 ABCD는 원에 내접함)

① 사각형이 원에 내접해? 일단 마주보는 각의 합 180도!

② 원에 내접하는데 직각이야? 그럼 선분 BC를 지름으로 하는 원? 외접원을 그려주자! ('외접원이 있네'라고 넘어가면 안 되고 직접 그리자)

③ 원에 내접하는 삼각형? 당연히 사인법칙?

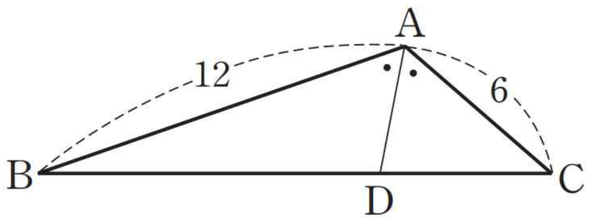
07



① 삼각형이 원에 내접해? 당연히 사인법칙!

② 그런데 각 C와 각 D는 같은 현으로부터 파생됐네? 그럼 크기가 같은 원주각? 당연히 표시! 중심이 안 그려져있으니 중심각까지는 굳이 할 필요는 없겠네?

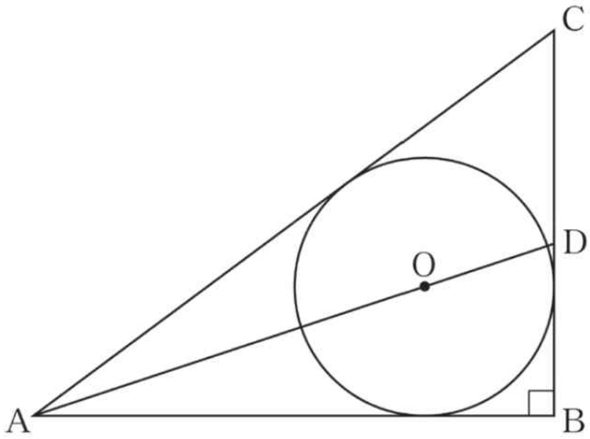
08



① 두 변의 길이와 사잇각을 알아? 코사인법칙으로 선분 BC의 길이 구하기 가능!

② 그런데 선분 AD의 길이를 구하는 게 문제야? 코사인법칙으로도, 사인법칙으로도 해결이 안 되는데 뭘 해야하지? 이런 비슷한 그림을 어디서 봤더라? 삼각형의 넓이를 통해 선분 AD를 구하자!

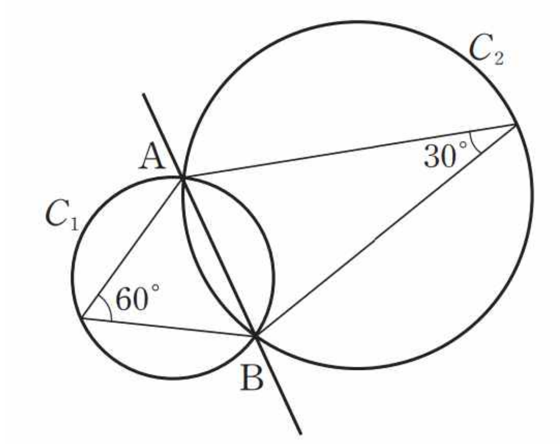
09



① 원이 내접해? 일단 중심에서 접점에 수선의 발 내리고 수직 표시!

② 점 A에서 접선을 두 개를 그었어? 그럼 각 CAD와 각 DAB가 같고, 합동인 삼각형 한 쌍이 생기네?

10

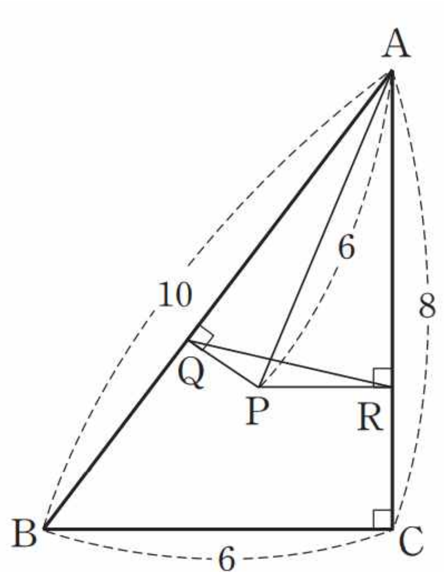


① 삼각형이 원에 내접해? 그럼 당연히 사인법칙!

② 60 ° 와 30 ° 는 원주각인데 원의 중심이 표시되있지 않네? 그럼 내가 굳이 중심각까지 갈 필요는 없겠네?

(예시 02번의 그림과 비교해보자. 해야하는 데에는 이유가 있다.)

11

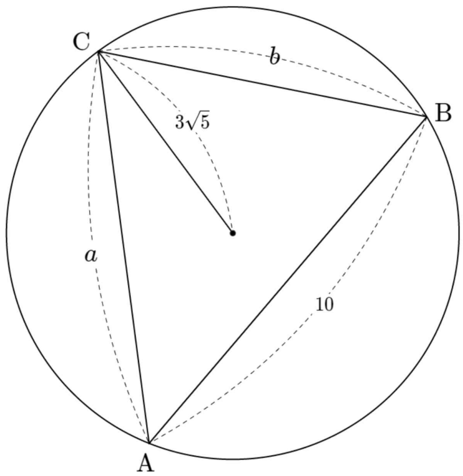


① 빗변을 공유하는 직각삼각형 두 개가 있어? 그럼 일단 외접원 그려줘야지. 뭐야, 아무 의미 없던 선분 AP가 외접원의 원의 지름이 되면서 존재의 의미가 생겼네?

② 원에 내접하는 사각형이야? 그럼 당연히 또 마주보는 각의 합이 180도 써야겠네

③ 사각형을 나누면 삼각형인데 또 원에 내접해? 그럼 당연히 사인법칙?

12

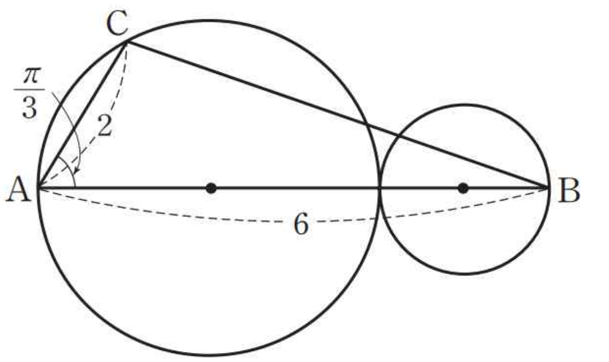


① 삼각형이 원에 내접해? 그럼 사인법칙?

② 원의 반지름을 줬는데 한 변의 길이를 줬어? 그럼 사인법칙으로 각 C의 삼각비 찾는거 가능?

③ 각 C를 찾으면 두 변의 길이 a, b와 끼인 각을 아는 건데 그러면 코사인법칙도 사용 가능?

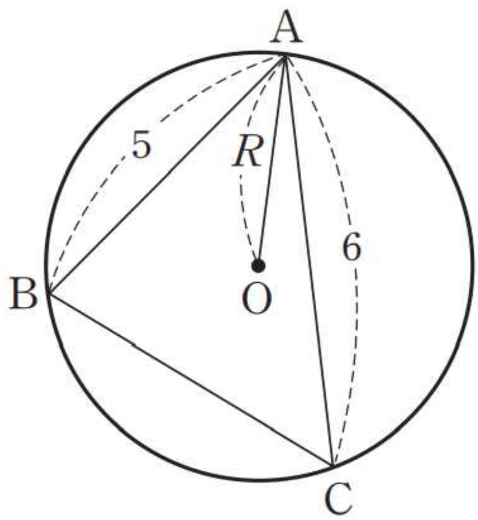
13



① 원과 원이 만났어? 그럼 접점(D) 표시.

② 점 C는 원 위의 점인데 허전하네? 중심과 이어볼까? 선분 AD가 지름이니 점 C와 점 D도 이어서 직각을 만들어 줄까?

14

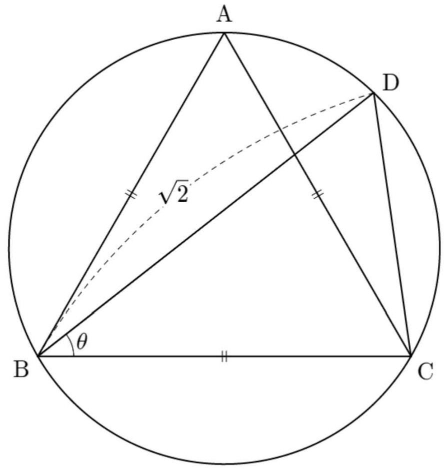


① 삼각형이 원에 내접해있어? 그럼 사인법칙!

② 거기다 반지름을 구해야돼? 그럼 더더욱 사인법칙!

③ cosA 값을 줬어? 양변과 끼인 각을 알아? 그럼 당연히 코사인 법칙!

15



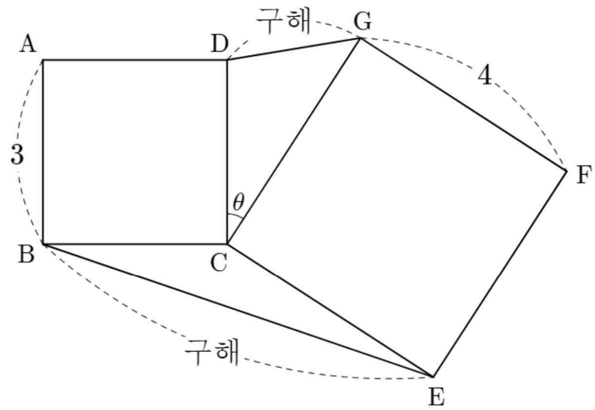
① 뭐야 정삼각형이야? 그럼 일단 모든 각에 60도는 표시해둬야지.

② 근데 현 BC에서 원주각이 두 개가 있네? 그럼 당연히 각 BDC에도 60도는 표시두기!

③ 원에 내접하는 삼각형이야? 그럼 당연히 사인법칙!

④ 한 삼각형에서 세 각에 대한 정보를 모두 알고 그 중 한 변의 길이($\sqrt{2}$)를 알아? 그럼 사인법칙!

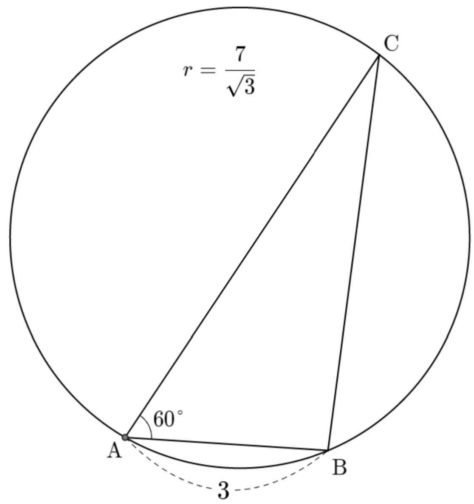
16



① 선분 DG를 구해야 돼? 근데 삼각형 DCG의 양변과 끼인 각에 대한 정보를 알고 있어? 당연히 코사인법칙!

② 선분 BD를 구하려면 삼각형 BCE를 관찰해야 하는데 마찬가지로 양변의 길이는 알고 있네. 그럼 끼인 각만 구하면 될 것 같은데? 정사각형 두 개니깐 직각이 두 개여서 각 BCE도 θ로 표현할 수 있겠네!

17



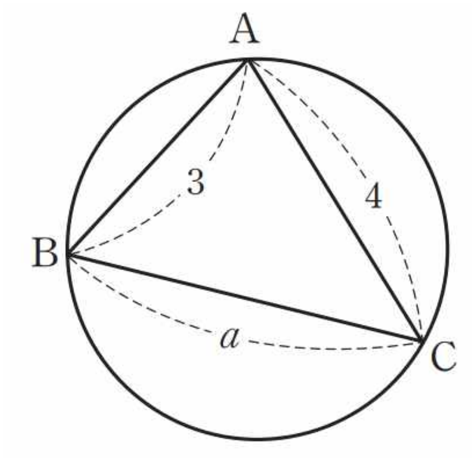
① 삼각형이 내접해 있어? 그럼 당연히 사인법칙!

② 거기다가 반지름도 알고 있어? 그럼 당연히 사인법칙!

③ 각 A를 알고 있으니 사인법칙으로 선분 BC의 길이를 구해보는 건 당연히 해야할 일!

④ 선분 AB의 길이를 알고 있으니 사인법칙으로 각 C에 대한 정보를 찾는건 당연히 해야할 일!

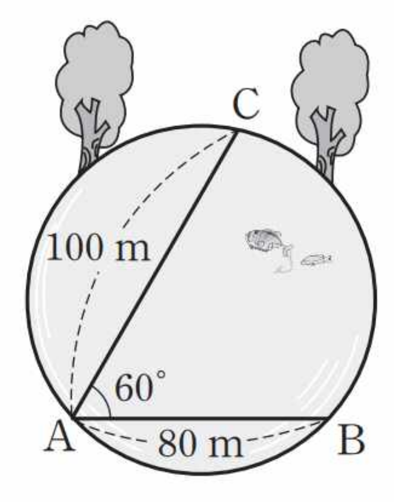
18



① 삼각형이 내접해있어? 그럼 당연히 사인법칙

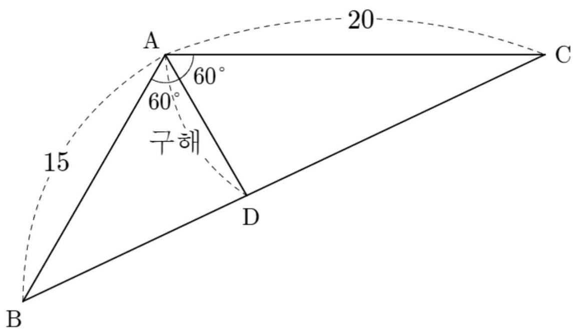
② 세 변의 길이를 알고 있어? 그럼 당연히 코사인법칙
(이 문제는 합답형 문제로서 ㄱ, ㄴ, ㄷ에 따라 각기 다른 a의 값을 설정해줌)

19



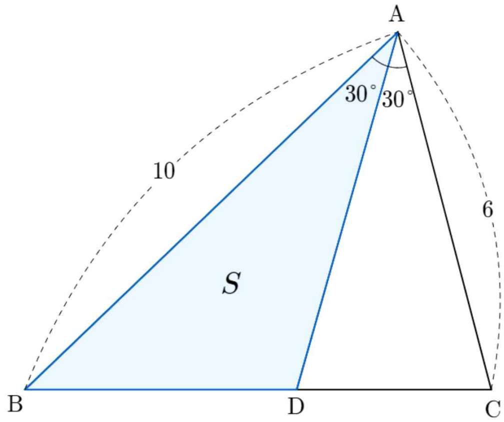
① 두 변과 끼인 각을 알고 있어? 그럼 당연히 코사인법칙!
② 삼각형이 원에 내접해있어? 그럼 당연히 사인법칙!

20



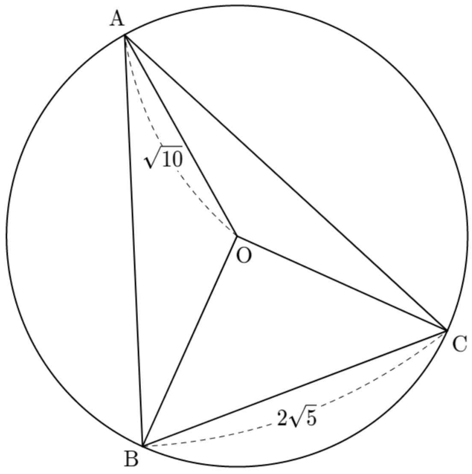
① 양변의 길이와 끼인 각을 알고 있어? 그럼 당연히 코사인 법칙?
② 그런데 구하는 건 선분 AD야? 코사인법칙으로 구할 수 없는 구조인데? 그럼 이 그림 어디서 봤더라? 넓이를 이용해서 구하자!

21



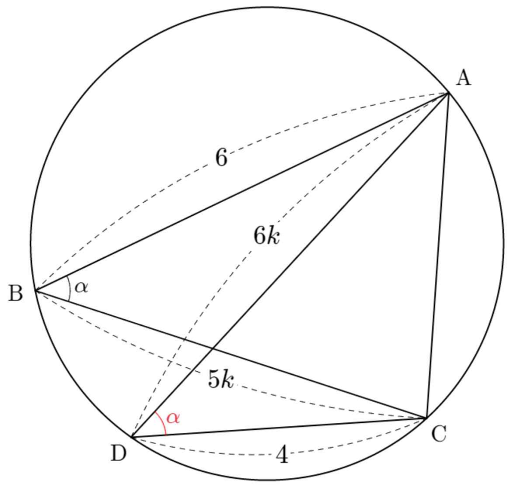
① 삼각형의 넓이를 구하는데 $\frac{1}{2} \times \text{밑변} \times \text{높이}$를 못 쓴다. 30°와 길이 10을 이용해 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$도 이용해보려 했는데 선분 AD의 길이를 모른다.
② 그럼 이제야 삼각형 넓이 구하기 ③단계 이후로 넘어가자! 큰 삼각형을 먼저 구하고 비율을 이용하자!

22



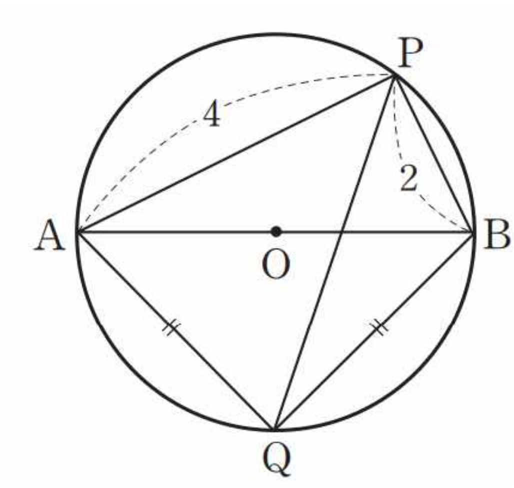
① 삼각형이 원에 내접해있어? 그럼 당연히 사인법칙!
② 반지름도 알고 한 변의 길이를 알아? 그럼 당연히 사인법칙으로 각 A에 대한 정보 찾기!
③ 각 A를 구했는데 대놓고 원주각과 중심각이 그려져있네! 그럼 당연히 중심각도 같이 구할 수 있네!

23



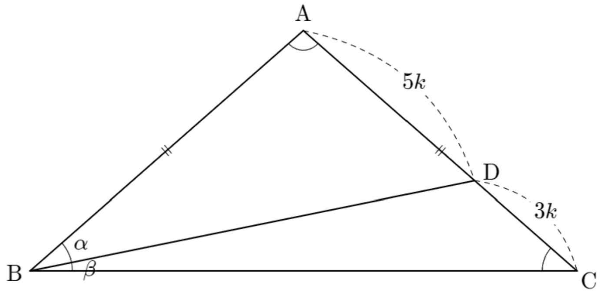
① 각 B를 발견했으면 당연히 각 D도 원주각으로 그림을 보자마자 체크해주자!
② 삼각형이 내접해있어? 그럼 혹시 사인법칙?
③ 두 변의 길이를 알고 끼인 각을 알아? 그럼 당연히 코사인 법칙?

24



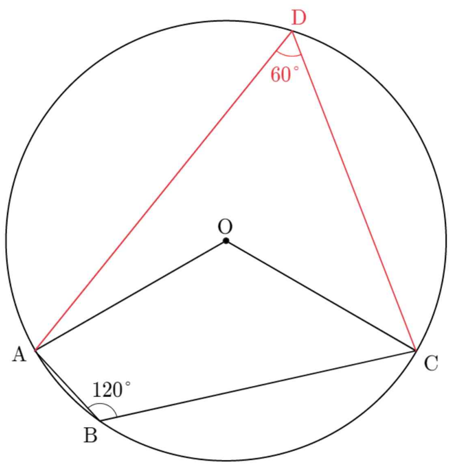
① 원에 내접하는 사각형? 당연히 내각의 합 180도!
② 삼각형 AQB가 이등변삼각형이야? 그럼 당연히 수선의 발!
③ 선분 AB가 지름이야? 그럼 당연히 원주각이 90도!

25



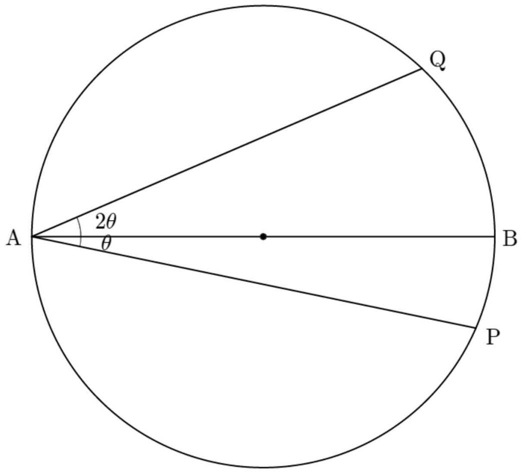
① 이등변삼각형이야? 일단 그러면 당연히 수선의 발부터!
② 한 삼각형에서 두 각을 알고 있는데 마주보는 길이도 알고 있어? 그럼 당연히 사인법칙!

26



① 지금 당장은 내접하는 삼각형도, 사각형도 없네?
② 중심각 AOC가 보이니 원주각을 만들어줄까?
③ 이러니 내접하는 사각형이 생겼네? 그럼 당연히 마주보는 각의 합이 180도!

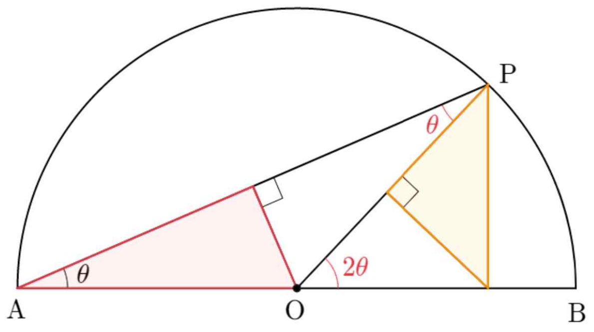
27



① 원의 지름이 있네? 이대로는 그림이 허전한데? 점 Q와 점 P를 점 B에 연결해 직각을 만들자!

② 점 P와 Q는 원 위의 점이니 당연히 중심과 연결하자!

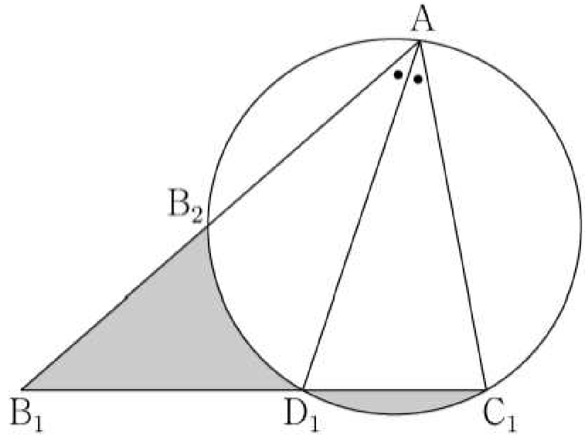
28



① 원에서 현이 나오고 중심과 이어져있네? 당연히 이등변삼각형이니 같은 각끼리 표시!

② 두 내각의 합은 반대편 외각의 크기이니 2θ까지 마무리!

29

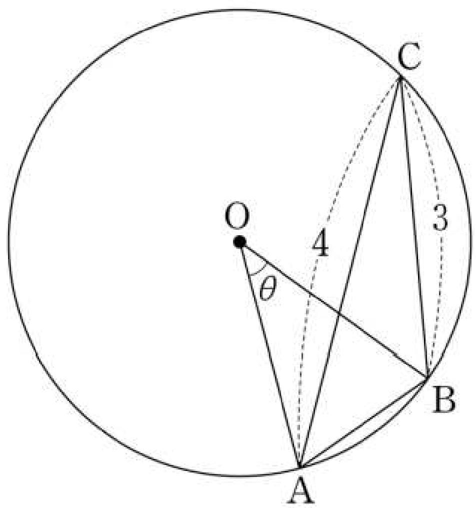


① 어? 원주각이 서로 같네? 그럼 당연히 원주각을 이루는 현도 이어서 같다고 표시!

② 원에 내접한 삼각형? 혹시 사인법칙?

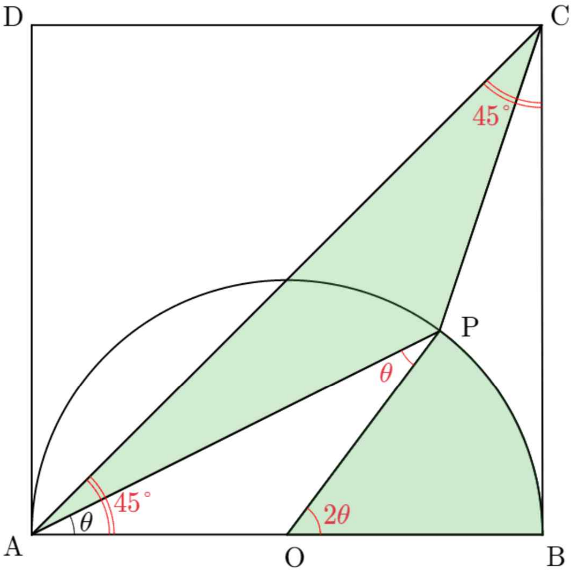
③ (①에 의해 현 B_2D_1을 그엇다면) 어? 원에 내접하는 사각형? 그럼 당연히 마주보는 각의 합이 180도!

30



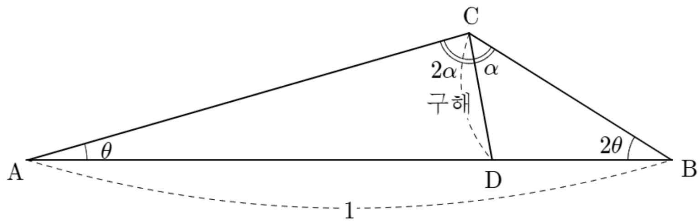
① 아니 이건 중심각? 그럼 당연히 원주각 표시정도는?

31



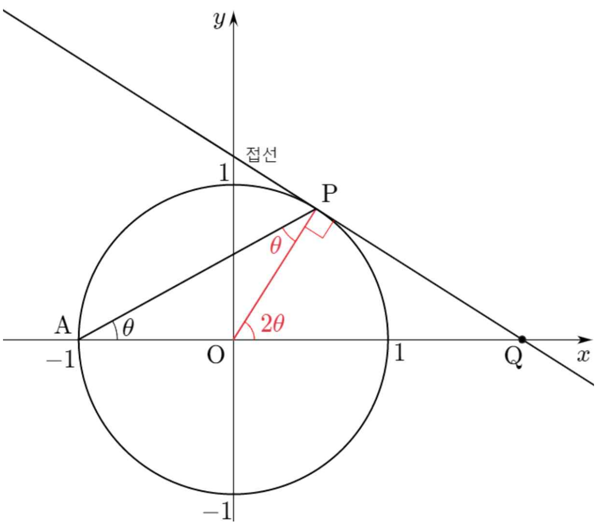
① 직각이등변삼각형이 보이네? 그럼 일단 45도 체크는 해둬야지!
② 원에 현이 있어? 중심하고도 이어져있어? 그럼 당연히 2θ까지 표시 해줘야지.

32



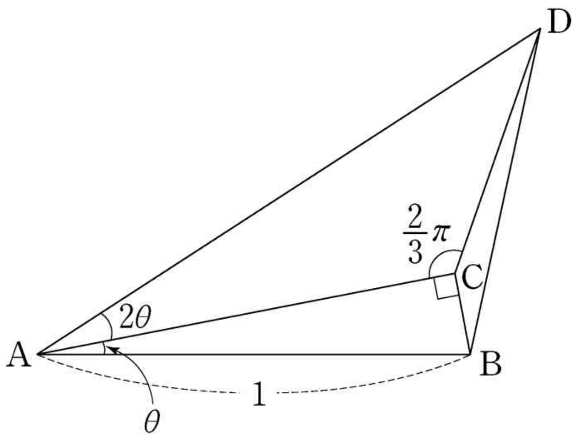
① 삼각형의 모든 각이 나타나있어? 그럼 α를 θ로 나타낼 수 있겠네?
② 작은 삼각형에 두 각의 크기를 알아? 근데 선분 CD를 구해야돼? 그럼 당연히 사인법칙 써야겠네!

32



① 점 P가 원 위의 점이야? 그럼 당연히 중심과 이어주기!
② 점 P에서의 접선이야? 그럼 당연히 접선과 반지름이 수직!
③ 현으로 인해 이등변삼각형이 보여? 그럼 당연히 2θ까지!

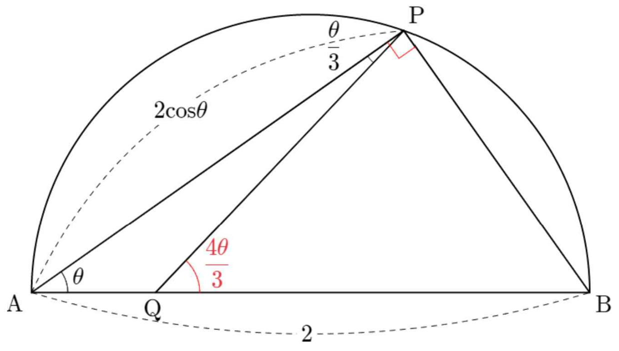
34



(선분 CD를 구하시오)

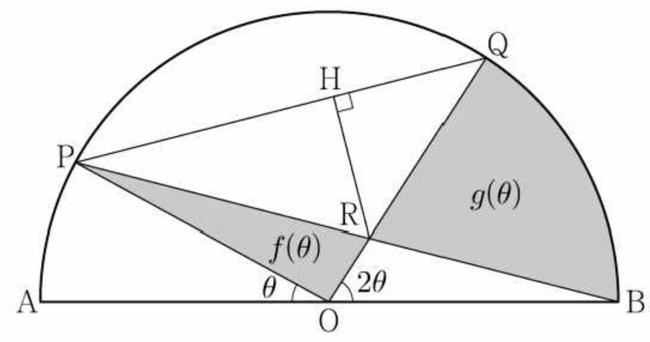
① 직각삼각형에 한 변의 길이와 한 각을 알고 있어? 그럼 당연히 남은 각들을 삼각함수로 표시!
② 삼각형 ACD의 모든 각을 아는데 이 중 하나의 변의 길이를 알고 다른 한 변의 길이를 구해야돼? 그럼 당연히 사인법칙!

35



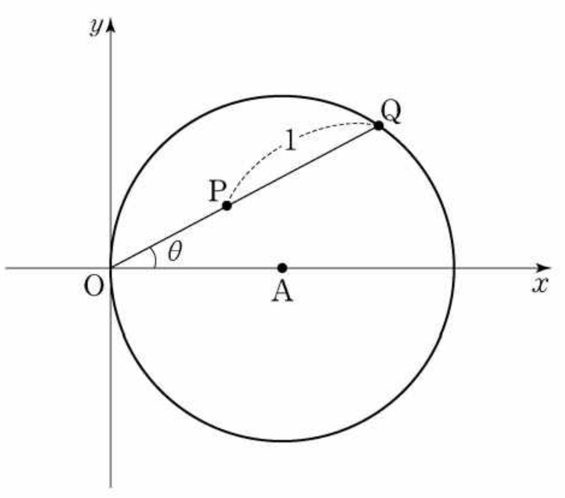
① 원 위의 점 P야? 그럼 당연히 B와 연결해서 직각 만들기!
② 삼각형의 두 내각이 나왔어? 그럼 당연히 외각 만들기!
③ 삼각형에서 두 각과 한 변의 길이를 아는데 다른 변의 길이를 구해야돼? 그럼 당연히 사인법칙!

36



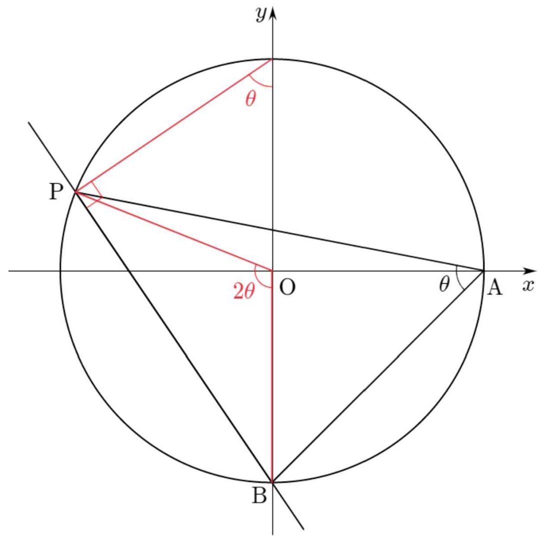
① 중심각을 알고 있어? 그럼 당연히 원주각 표시!
② 현에 의해 만들어진 이등변삼각형이 있어? 그럼 당연히 전부 θ나 $\frac{\theta}{2}$로 도배!

37



① 점 Q가 원 위의 점이야? 그럼 당연히 중심과 이어야겠네?
② 그랬더니 이등변삼각형이야? 그럼 당연히 수선의 발 내려주고 같은 길이, 같은 각들 표시해줘야겠네?

38



① 원주각이 있네? 그럼 당연히 중심각 만들어야지!
② 중심각 만들었더니 이등변삼각형이네! 당연히 수산의 발 내려야지!
③ 점 P는 원 위의 점이네? 그냥 두면 허전하니까 당연히 지름의 양 끝과 이어서 직각 만들어야지!
④ 직각을 만들었더니 같은 현에 대한 두 원주각이 있네? 그럼 당연히 θ로 같다고 표시해줘야지!

함수의 극한 계산

01. 다음 식을 성립하게 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$$

차선의 풀이

분자가 0으로 가기때문에 분모 또한 0으로 가야 수렴가능하므로 $1+a+b=0$이다. $\frac{0}{0}$꼴이 성립하므로 로피탈의 정리를 이용하면 $\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+a}=\frac{1}{3}$

따라서 $a=1$이고 $b=-2$이다.

최선의 풀이

분모는 이차함수이므로 $(x-1)(x-k)$로 인수분해 된다. 분자와 약분하면 $\frac{1}{x-k}$이므로 k에 무엇이 들어가야 $x=1$을 대입했을 때 3이 나오는지 생각해보면 $k=-2$이다. 따라서 분모는 $(x-1)(x+2)$이다. $x^2+ax+b=x^2+x-2$이므로 $a=1, b=-2$

가장 중요한 것은 k를 구하는 과정이 암산으로 이루어져야 한다는 것이다. $(x-1)(x$ 까지만 써놓고 남은 인수가 무엇인지 머릿속으로 생각해야 한다.

02. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=14$일 때, $a+b$의 값은?

풀이

분자가 $(x-3)(x-k)$인데 $3-k=14$이므로 k의 값은 -11이다. 따라서 $x^2+ax+b=(x-3)(x+11)$이다.

함수의 대칭성

함수의 대칭성은 ①함수의 식 자체에 있을 수도, ②조건에 포함되어있을 수도 있다.

① 함수의 식 자체에 대칭성이 있는 경우

예시) 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 ⋯

⇒ 곧장 함수 $f(x)$가 우함수라는 것을 이끌어 내야한다.

② 조건에 포함된 경우

(1) 우함수 : $f(x)=f(-x)$

(2) 기함수 : $f(-x)=-f(x)$

(3) 점 (a,b) 대칭함수 : $f(a+x)+f(a-x)=2b$

(4) $x=a$ 선대칭함수 : $f(a+x)=f(a-x)$

우함수와 기함수의 합성

① 우함수 ◦ 우함수 = 우함수
② 우함수 ◦ 기함수 = 우함수
③ 기함수 ◦ 우함수 = 우함수
④ 기함수 ◦ 기함수 = 기함수

이를 그대로 한글로 외울 생각을 하지 말고 우함수는 $y=x^2$, 기함수는 $y=x$로 두고 그때그때 시도해보자.

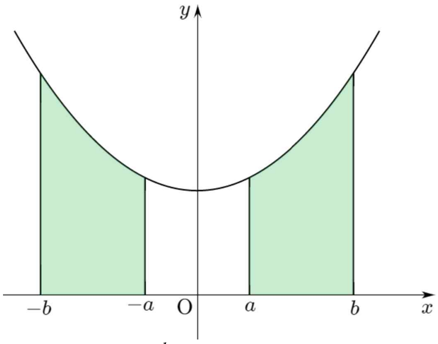
미분에서의 대칭성

① 함수 $f(|x|)$는 우함수이다. 이는 절댓값과의 연결성 덕분에 $x=0$에서의 미분가능성을 주로 따지게 된다.

적분에서의 대칭성

① 우함수의 정적분 : $\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

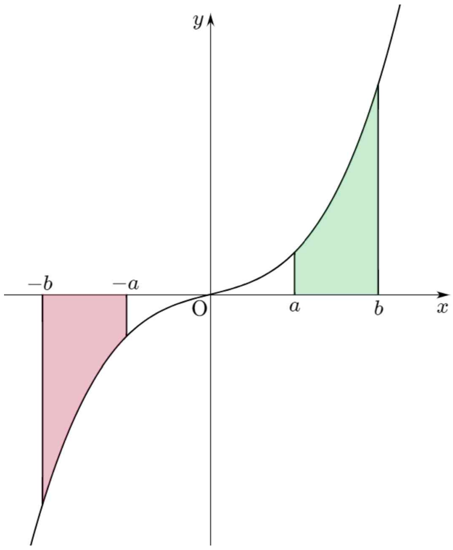
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$



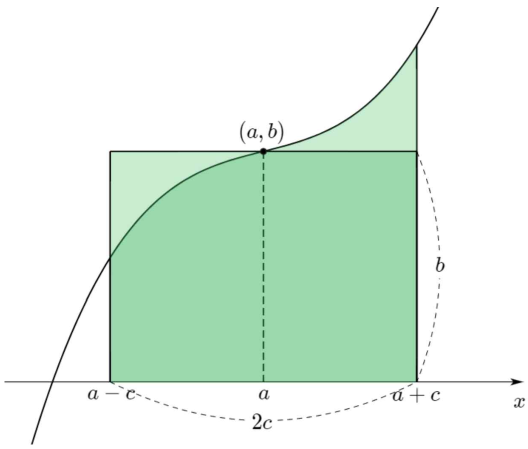
② 기함수의 정적분 : $\int_a^b f(x)dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



③ 점 (a, b) 대칭함수의 정적분 : $\int_{a-c}^{a+c} f(x)dx = 2bc$



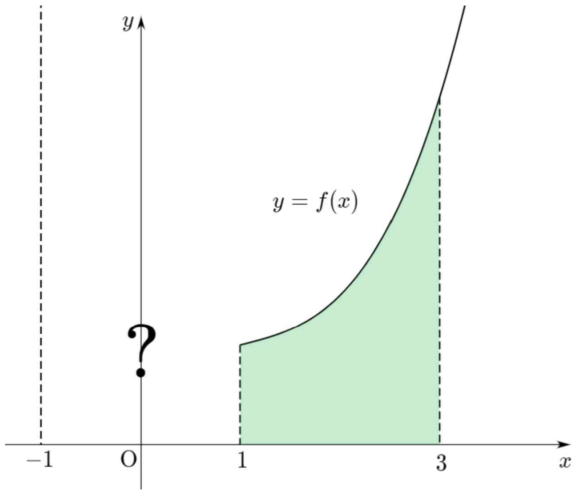
이 식들 또한 절대 문자 그대로 외우려고 하지말고, 즉석으로 함수들을 간단히 그려 판단해보도록 하자.

※ 특히 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$와 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$는 간단한 계산문제에서조차 잘 쓰려고 하자. 학원에서 수학조교를 하면서 학생들 시험지 풀이를 전부 보고 피드백해주는 시간이 있어서 시험지를 훑어보았다. 대충 $\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+x+2)dx$를 구하는 문제였는데 3등급 이하의 학생들은 이걸 이대로 적분하는 학생들이 태반이었고 상위권 학생들은 기함수를 일단 없애고 우함수 또한 $\int_{-1}^{1}$을 $2\int_0^1$로 바꿔푸는 학생들이 대부분이었다. 이런 사소한 계산을 하는 과정에서 상위권과 하위권이 갈린다는 것을 깨닫게 되는 순간이었다.

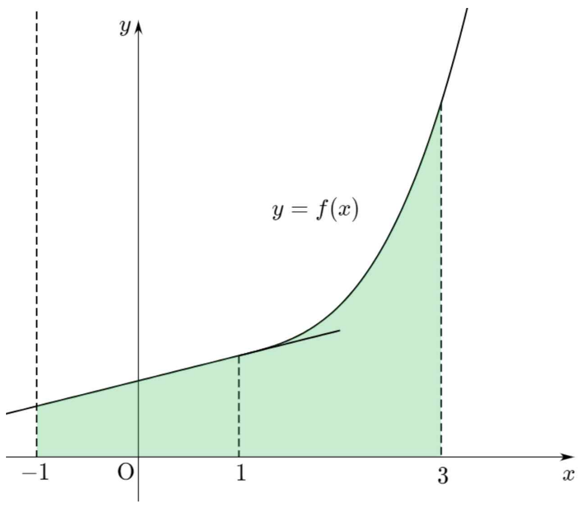
⇒ 적분문제에서 $\int_{-a}^{a}$가 나온다면 당연히 흘려보낼 것이 아니라 왜 적분구간이 y축 대칭인지 한 번쯤은 생각해보고, 피적분함수가 우함수나 기함수가 아닐지 생각하는 것은 당연하다.

※ 22번이나 30번 문항에서 정적분의 값을 구할 때 특정 구간의 함수를 모른다면 딱 두 가지이다.

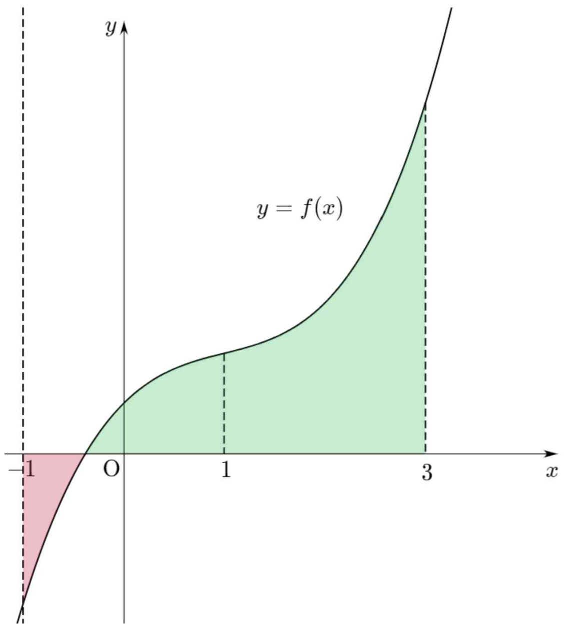
만약 이 상황에서 $\int_{-1}^{3} f(x)dx$의 값을 구하라고 했다면?



① 접선



② 점대칭



물론 구간을 모르는 함수에 대한 조건이 전혀 없는 것이 아니다. 분명 조건(나), (다)를 통해 남은 구간에 대한 정보를 주었을 것이지만 문제는 이들이 너무 복잡하고 어려워 우리가 해석하기 어렵다는 것이다. 이런 경우 우리가 모르는 구간을 접선을 긋거나 점대칭을 시켜 정적분을 구하는 것은 아주 현명한 방법이다.

절댓값 함수

가장 간단한 절댓값 함수

① $y=f(|x|)$: y축 대칭

⇒ $x=0$에서의 미분가능성에 대해 출제 : $f'(0)=0$
⇒ 우함수라는 특징을 가지고 출제

② $y=|f(x)|$: x축 위로 접어올리기

⇒ 함수가 x축과 만나는 지점에서 접어올린다는 점에서 미분가능하지 않은 점에 대해 출제

절댓값 함수를 바라보는 시선

① 함수의 안에 절댓값이 있다면 범위를 나누어 함수를 재정의한다.

예시) $y=x^3+2|x|$

② 함수 전체에 절댓값이 씌워져 있으면 함수의 그래프를 먼저 그리고 x축을 기준으로 접어올린다.

예시) $y=|\sin 2x-e^x|$

③ 앞선 두 경우가 섞여있으면 ①에서 ②순서대로 함수를 그린다.

예시) $y=|3\sin(2x+|x|)+1|$

문제를 통해 문제에 따라 절댓값 함수를 어떻게 해결할지 배워보자.

01. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

① 함수 $f'(x)$ 전체에 절댓값이 씌워져 있으므로 함수 $f'(x)$를 그린 다음 x축을 기준으로 접어 올려야겠군.

② 함수끼리의 대소비교에 대해 물어보고 있으므로 당연히 그래프를 그려야하기 때문에 함수 $f'(x)$를 그린 다음 x축을 기준으로 접어 올려야겠군.

02. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

① 함수 전체에 절댓값이 취해진 꼴이 아니므로 $f(x)+x$의 범위에 따라 함수를 재정의해주어야겠군.

② 함수 $f(x)$의 식이 주어져있으므로 직접 대입해서 어느 x값을 기준으로 부호가 바뀌는지 알아봐야겠군.

03. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\,(t\ge -1)$에 대하여 $-1\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$의 값을 구하시오.

① 함수 $f(x)$의 전체에 절댓값이 씌워져있으므로 함수 $f(x)$를 그리고 x축을 기준으로 접어올려야겠군.

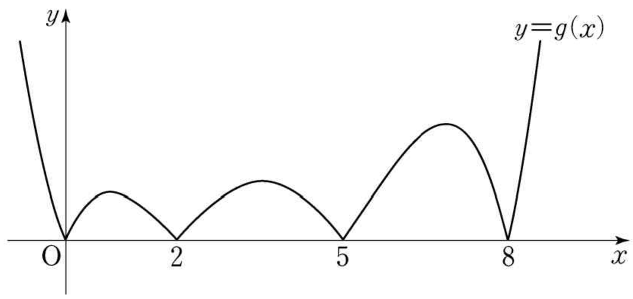
② 함수 $f(x)$에 대한 정확한 식을 알고 있으니 그릴 수 있고, 함수 $f(x)$를 그린 뒤 x축을 기준으로 접어올리겠다는 내 생각이 틀리지 않는군.

③ 함수의 최댓값에 대한 질문이므로 당연히 그래프를 이용한 풀이어야겠군. 따라서 함수 $|f(x)|$의 그래프를 그릴 수밖에 없겠군.

04. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



① 평소 다른 문제와 달리 절댓값 함수를 먼저 주고 속함수를 찾으라는 문제이므로 함수 $g(x)$의 그래프를 통해 접히기 전의 함수인 $\int_0^x f(t)dt$의 그래프를 추론해봐야겠군.

05. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$

(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오.

① 정적분은 넓이와 거의 같으므로 함수 $f(x)$의 그래프가 필요하겠군.

② 함수 전체에 절댓값이 씌어져있으므로 $f(x)$를 먼저 그린 후 x축에 대해 접어올려야겠군.

06. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$$

이다.

① 피적분함수가 절댓값 함수이지만 항등식이므로 그림으로 해결하는 것은 힘드겠군.

② $f'(x)$가 0이 되는 x값을 기준으로 $f'(x)$와 $-f'(x)$로 나누어 적분해주어야겠군.

07. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

① 절댓값 함수의 미분가능성에 대해 물어보고 있으므로 당연히 구간에 따라 함수를 재정의하는 것이 아닌, $f(x)-f(1)$의 그래프를 그려서 접어올려야겠군.

08.

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3, f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a|$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자.

① 절댓값 함수의 미분가능성에 대해 물었으므로 구간에 대해 나누는 것이 아닌 속함수를 그리고 x축을 기준으로 접어올려야겠군.

② 이 문제의 경우는 $f(x)$의 정확한 개형과 위치를 모르므로 x축보다는 함수 $f(x)$와 $y=t$가 만나는 곳을 기준으로 접어올리면 편하겠군.

09. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x\ge 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

① 정적분은 넓이를 포함하므로 x값에 따른 정적분의 값을 함수로 나타내기 위해서는 피적분함수의 그래프가 필요하겠군.

② 피적분함수 전체에 절댓값이 있는 것이 아니므로 부호에 따라 함수를 재정의해 주어야겠군.

③ 따라서 $f(x)$가 양수인지 음수인지에 따라 피적분함수를 $2f(t)$나 0으로 정리해 주어야겠군.

10. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.

(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 같다.

① 함수 전체에 절댓값이 있으므로 $f(x)$를 그리고 x축을 기준으로 접어올리면 되겠군.

11. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$

(나) 집합 $\{x|x\ge 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오,

① 함수 전체에 절댓값이 있으므로 속함수를 그리고 접어올려주면 되겠군.

② 함수의 미분가능성에 대해 묻고 있으므로 속함수를 그리고 접어올려주면 되겠군.

③ 6차함수에 대해서는 배운 적이 없으므로 적당히 삼차함수 두 개로 나누어 인수 위주로 살펴봐야겠군.

12. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

① 함수 전체에 절댓값이 있으므로 구간에 따라 나누기보다는 $f(x)-g(x)$를 그려 x축을 기준으로 접어올려야겠군.

② 함수의 미분가능성에 대해 물었으므로 속함수를 그린 후 통째로 접어올려야겠군.

③ $f(x)-g(x)$를 그릴 때, 한번에 그리는 것도 좋겠지만 $f(x)$와 $g(x)$를 각각 그려 만나는 점에서의 미분가능성을 따지는 것도 좋은 방법이겠군.

13. 곡선 $y=|\sin 2x|+1$과 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$,

$x=\dfrac{5\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 함수 전체에 절댓값이 있는 것은 아니지만 절댓값 밖에 상수밖에 없기 때문에 $\sin 2x$를 먼저 그리고 접어올려주면 되겠군.

14. 두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수

$g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가

다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $h'(3)=2$

① 함수 $h(x)$ 전체에 절댓값이 있으므로 $h(x)$의 그래프를 그려 접어올리면 되겠군.

② 미분가능성을 묻고 있으므로 $|h(x)|$가 $x=1$에서 꺾으면 되겠군.

③ 하지만 $h(x)$의 그래프를 그리는 것이 쉬운 것이 아니므로 미분계수의 정의를 이용해야겠군.

15. 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\displaystyle\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?

① 구간이 상수인 정적분에서의 절댓값 함수는 단순 함수와 x축 사이의 넓이로 볼 수 있으니 이를 통해 $f(x)$를 추론해야겠군.

② $\displaystyle\int_0^1 f(x)F(x)dx$를 구할 때 $F(x)$ 안에 절댓값이 포함되어있으므로 적분을 하기 위해서는 $f(x)$를 접어올리는 것이 아닌 구간에 따라 $f(x)$를 재정의해주는 것이 필요하겠군.

16. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여

함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을

구하시오.

① 함수 전체에 절댓값이 있는 것이 아니므로 구간에 따라 $f(x)$를 재정의해 주어야겠군.

② 무엇보다 함수 $f(x)$의 정확한 식을 알고 있으므로 그래프를 통해 구간을 더 쉽게 나눌 수 있겠군.

17. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\dfrac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \dfrac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $\left[-\dfrac{7}{2}\pi, \dfrac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$를 구하기 위해 도함수로서 $f(x)$가 필요하므로 $f(x)$를 그려야겠군.

② $f(x)$의 전체에 절댓값이 있는 것이 아니므로 구간에 따라 $\sin x$의 부호를 판단해 재정의 해주어야겠군.

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$

에 대하여 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오.

① 절댓값이 함수 안에도 있고 전체 밖에도 있으므로 안부터 해결해야겠군.

② 내부에 있는 절댓값은 $|x|$이므로 $x=0$을 기준으로 함수를 재정의해주면 되겠군.

③ 겉에 있는 절댓값은 속함수를 전부 그린 후 x축을 기준으로 접어 올려주면 되겠군.

19. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

① 함수 전체에 절댓값이 있으므로 속함수를 먼저 그리고 x축을 기준으로 접어올려야겠군.

② $g(x)$에 따로 묻고 있으므로 $g(x)-f(x-k)$를 한 번에 그리는 것과 별개로 $g(x)$와 $f(x-k)$를 따로 그려 그래프 상에서의 거리로 관찰할 수 있겠군.

20. 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\dfrac{\pi}{2} < k < \dfrac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

① 함수 전체에 절댓값이 있는 것은 아니지만 구간에 따라 $f(x)-t$의 부호를 관찰할 수 없으므로 $f(x)$의 그래프와 $y=t$의 교점을 그래프 상에서 관찰하는게 좋겠군.

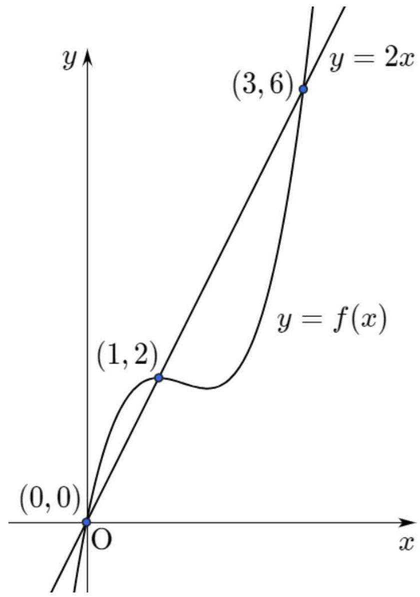
다항함수 세팅

두 점을 지나는 다항함수의 세팅법

① 두 점을 지나는 직선을 구한다.
② 다항함수와 직선의 방정식을 뺀 새로운 식을 통해 인수정리가 된 상태로 식을 작성한다.
③ ②과정이 익숙해지면 직선의 방정식이 x축이라고 생각하고 식을 쓴 다음 직선의 방정식을 더해준다.

예시) 점 (0,0)과 점 (1,2)를 지나는 삼차함수 $f(x)$의 식을 작성해보자.

① 두 점을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x$이다.
② 직선의 방정식을 $g(x)$라고 한다면 $f(x)-g(x)$는
$x=0$과 $x=1$을 인수로 가지기에
$f(x)-g(x)=kx(x-1)(x-a)$이다.
③ 이 과정은 그림을 통해 그래프의 상황을 파악하면 더 간단하게 접근할 수 있다. 직선이 x축이라 생각하고 일반적인 삼차함수를 작성한 다음, 직선의 방정식을 더해주자.



만약 $y=2x$의 직선을 x축으로 생각하고 $f(x)$의 식은 어떻게 작성할까? : $f(x)=$__________________

그 식에 직선의 방정식을 더해주면 된다.

각 변환

100점 만점의 시험지에서 98점, 97점이 등장하는 가장 큰 이유 중 하나는 각변환에 대해 물어보는 첫페이지 2,3점 문제에서 실수로 틀린다는 것이다.

예를 들어 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이다.

하지만 이때, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$라는 조건이 추가되면? 아마 생각하기에 귀찮아질 것이다.

따라서 나는 이때 **덧셈정리**를 이용한다.

덧셈정리

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

복부호 동순이다. tan는 굳이 익힐 필요없다.

다시 한번 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$를 덧셈정리로 풀어보면 θ의 크기와 상관없이 $\sin\frac{\pi}{2}\times\cos\theta+\cos\frac{\pi}{2}\times\sin\theta=\cos\theta$이다.