22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

명제 “함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.”의 대우는

명제 “함수 $f(x)$와 모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1)\geq 0$이다.”이다.

이때 모든 짝수 k가 $f(k-1)f(k+1)\neq 0$을 만족하면 $f(k-1)f(k+1)>0$이므로

모든 홀수 k에 대하여 $f(k)<0$이거나 모든 홀수 k에 대하여 $f(k)>0$이다.

하지만 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(k)<0$인 홀수 k가 적어도 하나 존재하며 $f(k)>0$인 홀수 k 또한

적어도 하나 존재한다. 따라서 어떤 짝수 k는 $f(k-1)f(k+1)=0$을 만족한다.

위와 동일하게 어떤 홀수 k는 $f(k-1)f(k+1)=0$을 만족한다.

즉 어떤 짝수 a와 어떤 홀수 b에 대하여 $f(a)=0,\ f(b)=0$인 a와 b가 적어도 하나 존재한다.

한편 방정식 $f(x)=0$이 $x=a$와 $x=b$에서 동시에 중근을 가질 수 없으므로 a와 b의 차이가 1보다

큰 경우 $f(a-1)f(a+1)<0$ 또는 $f(b-1)f(b+1)<0$을 만족한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 이웃한 어떤 두 정수를 반드시 실근으로 가진다.

이 경우 $f(x)=(x-n)(x-n-1)(x-t)$ (단, n은 정수)라 하자.

이때 $t<n-1$인 경우 또는 $t>n+2$인 경우 $f([t])<0<f([t]+1)$이므로 주어진 조건을

만족하지 않는다. (단, $[t]$는 t보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$\therefore\ n-1\leq t\leq n+2$

즉 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는 어떤 정수 n과 $n-1\leq t\leq n+2$인 어떤 실수 t에 대하여

$f(x)=(x-n)(x-n-1)(x-t)$인 경우뿐이다.

이때 세 수 $t,\ n,\ n+1$을 크기 순서대로 나열한 것을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \le \beta \le \gamma)$라 하면

$x \le \alpha$ 또는 $x \ge \gamma$에서 $f'(x) \ge 0$이므로 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right) \subset (\alpha,\ \gamma)$이다. 즉 $\alpha \le -\frac{1}{4},\ \gamma \ge \frac{1}{4}$이다.

이때 $\alpha = n$이고 $\gamma = n+1$인 경우 α의 최댓값은 -1이며 γ의 최솟값은 1이므로 주어진 조건을

만족하지 않는다.

즉 $n-1 \le t < n$ 또는 $n+1 < t \le n+2$이며 각각의 경우에서 $\beta = n$ 또는 $\beta = n+1$이다.

다시 말해 β는 열린구간 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$에 속하는 정수이므로 $\beta = 0$이다.

따라서 $f(x) = (x+1)x(x-t)\ \ (0 < t \le 1)$ 또는 $f(x) = (x-t)x(x-1)\ \ (-1 \le t < 0)$이다.

$f(x) = (x+1)x(x-t)\ \ (0 < t \le 1)$인 경우 $f'(x) = x(x-t)+(x+1)(x-t)+(x+1)x = 3x^2-2(t-1)x-t$

에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}+\frac{t-1}{2}-t = -\frac{1}{4}$인 경우 $t = -\frac{1}{8}$인데 $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}-\frac{t-1}{2}-t = \frac{7}{8} > 0$이므로

주어진 조건을 만족하지 않는다. 따라서 $f(x) = (x-t)x(x-1)\ \ (-1 \le t < 0)$이다.

한편 $f'(x) = x(x-1)+(x-t)(x-1)+(x-t)x = 3x^2-2(t+1)x+t$의 축이 $x = \frac{t+1}{3} \ge 0$이므로

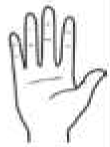
$f'\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$이면 $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$이다.

이때 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}+\frac{t+1}{2}+t = -\frac{1}{4}$에서 $t = -\frac{5}{8}$이므로 $f(x) = x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$이다.

$\therefore\ f(8) = 483$

출처 : 2020년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 : 고등학교 수학 (ORM 2021-55)
(https://www.kice.re.kr/resrchBoard/view.do?seq=927&s=kice&m=030103)

3. 세 학생 A, B, C는 가위바위보를 하여 이긴 사람부터 차례대로 수행평가 발표 순서를 정하기로 하였다. 다음은 세 학생이 가위바위보를 한 결과를 나타낸 표이다.

첫 번째 판			두 번째 판			세 번째 판	
A	B	C	A	B	C	A	B
		(가)					(나)

표에 대하여 두 명제

p : 모든 학생은 비긴 판이 있다.

q : 어떤 학생은 가위, 바위, 보를 모두 사용하였다.

가 모두 참일 때, (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	가위	바위
②	바위	가위
③	바위	보
④	보	바위
⑤	보	보

이 문항은 실생활의 가위바위보 상황을 이용하여 명제와 조건의 뜻을 알고 ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해하는지를 묻고 있음. ‘모든’, ‘어떤’을 포함하는 두 명제를 이용하여 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하며 정당화하는 과정을 거쳐 답을 구한다는 측면에서 ‘추론’을 평가함.
전체 정답률이 54.68%로 보통 수준의 문항이며, 변별도는 0.24로 다소 낮게 나타남.
2수준과 3수준의 정답률 차이가 거의 없으며 3수준과 4수준의 정답률 차이가 크지 않은 것이 변별도가 낮아진 원인이라고 추정됨.
답지 반응률 분포 곡선을 보면, 1수준 학생의 경우 정답지 ⑤에 대한 반응률보다 오답지 ③과 ④에 대한 반응률이 높게 나타나고 있음. 1수준의 학생들에게 어려운 문제였으며, 해당 수준의 학생들에게 ‘모든’과 ‘어떤’을 포함한 명제를 이해하고 이를 바탕으로 실생활 상황 속 결과를 추론하는 역량이 부족함을 알 수 있음.

명제와 조건, 진리집합과 명제의 부정

참인지 거짓인지를 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 하며, 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수의 값에 따라 참, 거짓이 판명될 때, 이 문장이나 식을 조건이라고 한다.

즉, 참인 문장과 식 그리고 거짓인 문장과 식 모두 명제이며, 각각을 '참인 명제'와 '거짓인 명제'라 하며, 방정식과 부등식은 변수의 값에 따라 참, 거짓이 정해질 수 있으므로 조건이다.

또 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다. 특별한 말이 없으면 전체집합 U는 실수 전체의 집합이다. 명제와 조건은 보통 p, q 등으로 나타내고, 조건 p, q의 진리집합은 P, Q로 나타낸다. 조건의 진리집합은 전체집합의 부분집합이므로 조건을 말하기 앞서 전체집합이 무엇인지 알아야 한다.

명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 부정이라고 하며, 이것을 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다. 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다. 또한 명제 $\sim p$의 부정은 p이다. 즉 $\sim(\sim p) = p$이다.

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 전체집합 U의 원소 중에서 $\sim p$를 참이 되게 하는 원소는 P의 원소가 아니므로 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

‘모든’, ‘어떤’이 들어 있는 명제

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제 ‘모든 x에 대하여 p이다.’가 참이면 조건 p의 진리집합을 P가 전체집합 U와 같고, 거짓이면 P가 U와 같지 않다.

또한 명제 ‘모든 x에 대하여 p이다.’는 $P=U$이면 참이고, $P\neq U$이면 거짓이다.

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’가 참이면 P가 공집합이 아니고, 거짓이면 P가 공집합이다.

또한 명제 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’는 $P\neq\varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

즉 ‘모든’이 들어 있는 명제는 성립하지 않는 예가 하나만 있어도 거짓인 명제가 되고, ‘어떤’을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참인 명제이다.

명제 ‘모든 x에 대하여 p이다.’의 부정은 ‘p가 아닌 x가 있다.’, 즉 ‘어떤 x에 대하여$\sim p$이다.’가 된다. 또 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’의 부정은 ‘p인 x가 없다.’, 즉 ‘모든 x에 대하여 $\sim p$이다.’가 된다.

명제 $p \rightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계

'p이면 q이다.'의 꼴의 명제를 기호로 $p \rightarrow q$와 같이 나타내고 p를 가정, q를 결론이라고 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때 다음이 성립한다.

① 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고, $P \subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$는 참이다.

② 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이고, $P \not\subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$는 거짓이다.

명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 보일 때에는 조건 p는 참이 되게 하지만 조건 q는 거짓이 되게 하는 원소의 예를 들어도 된다. 이와 같은 예를 반례라고 한다.

명제 $p \rightarrow q$의 역과 대우

명제 $p \rightarrow q$의 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제 $q \rightarrow p$를 명제 $p \rightarrow q$의 역이라고 한다.

한편 명제 $p \rightarrow q$에서 가정 p와 결론 q를 각각 부정하여 서로 바꾸어 놓은 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$를 명제 $p \rightarrow q$의 대우라고 한다. 즉, 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$의 역 $\sim p \rightarrow \sim q$는 명제 $q \rightarrow p$의 대우이다.

전체집합 U에 대하여 명제 $p \rightarrow q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 이때 $p \rightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고, $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 명제 $p \rightarrow q$가 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q$와 $\sim q \rightarrow \sim p$는 참, 거짓이 같음을 알 수 있다.

필요조건, 충분조건 그리고 필요충분조건

명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로 $p \Rightarrow q$와 같이 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.

이와 같이 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$가 모두 참일 때, $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$이다.

이때 p는 q이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이다. 이것을 기호로 $p \Leftrightarrow q$와 같이 나타낸다.

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 하며, q도 p이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

$p \Leftrightarrow q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $p \Rightarrow q$이면 $P \subset Q$, $q \Rightarrow p$이면 $Q \subset P$이므로 $P = Q$가 성립한다. 또한 $P = Q$이면 $p \Leftrightarrow q$가 성립한다.

문자가 사용된 식과 관련되어 필요조건과 충분조건을 판정할 때에는 문자가 어떤 범위에서 값을 가질 수 있는지 파악하게 한다. 문자가 자연수인 경우와 정수인 경우, 그리고 실수인 경우에 참과 거짓이 달라질 수도 있다.

정의, 증명 그리고 정리

용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라고 한다. 어떤 명제가 참임을 보이는 과정을 증명이라고 하며, 증명된 명제 중에서 기본이 되는 명제를 정리라고 한다.

대우증명법

명제 $p \rightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \ \sim p$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 보이는 대신 그 대우가 참임을 보여도 된다. 이를 대우증명법이라 한다.

대우증명법을 이용하여 명제 ‘자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.’가 참임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

> 주어진 명제의 대우 ‘자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.’가 참임을 보이자.
>
> 자연수 n이 짝수이면 $n = 2k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이다. 여기서 $2k^2$이 자연수이므로 n^2은 짝수이다. 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 ‘자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.’가 참이다.

귀류법

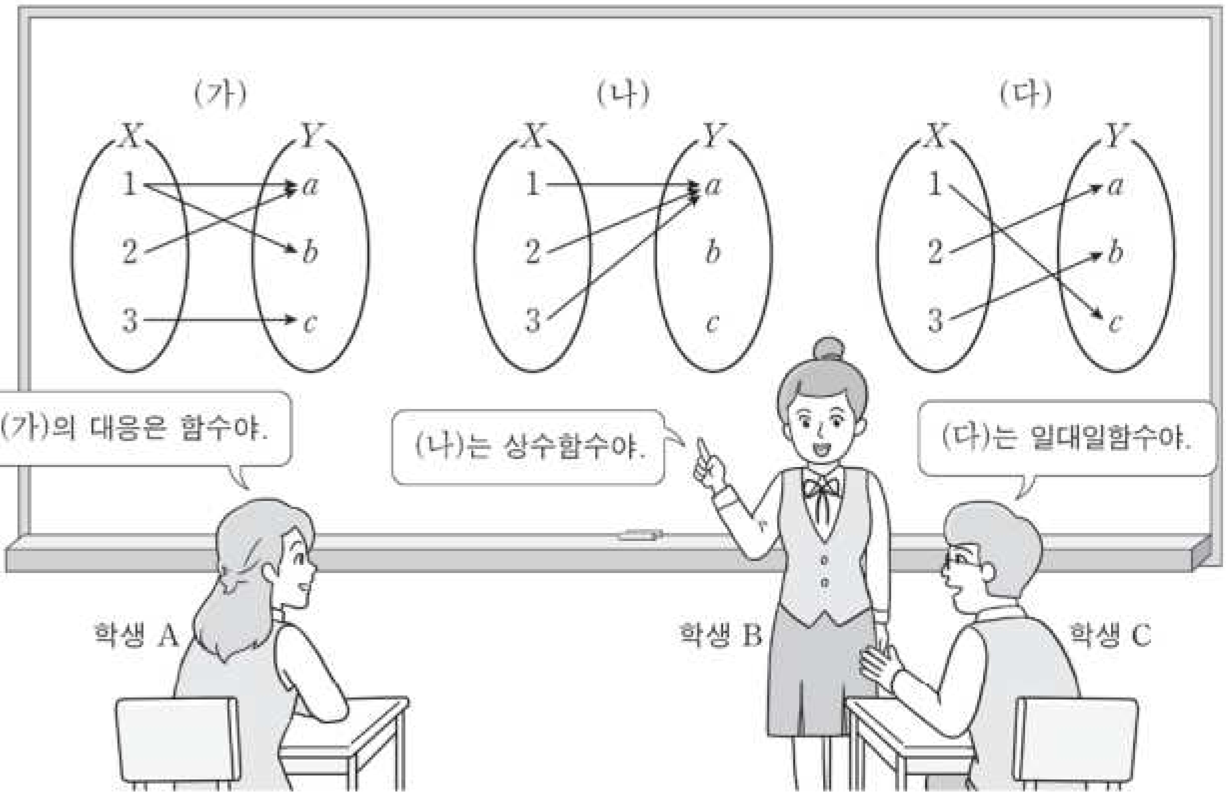
어떤 명제를 직접 증명하기 어려울 때, 그 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보여 증명하기도 한다. 이와 같이 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명하고자 할 때, 그 명제의 결론 q를 부정하면 명제의 가정이나 참이라고 알려진 사실에 모순이 된다는 것을 밝혀 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

귀류법을 이용하여 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'가 참임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

> $\sqrt{2}$가 유리수라고 하면 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수)과 같이 나타낼 수 있다.
>
> $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$의 양변을 제곱하여 정리하면 $n^2=2m^2$ $\cdots$ ①이다. ①에서 n^2은 2의 배수이므로 n도 2의 배수이다. 즉 $n=2k$(k는 자연수)로 놓고 ①에 대입하여 정리하면 $m^2=2k^2$이다. m^2이 2의 배수이므로 m도 2의 배수이다. 따라서 m, n이 모두 2의 배수가 되어 m, n이 서로소라는 조건에 모순이다. 즉 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

출처 : 2020년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 : 고등학교 수학 (ORM 2021-55)
(https://www.kice.re.kr/resrchBoard/view.do?seq=927&s=kice&m=030103)

5. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $Y=\{a, b, c\}$로의 대응에 대한 세 학생 A, B, C의 대화이다. 옳게 말한 학생을 모두 고른 것은?



① A　　② B　　③ C　　④ B, C　　⑤ A, B, C

이 문항은 두 집합 사이의 대응이 드러난 세 개의 그림이 주어진 상황에서, 각 그림 속의 대응을 보고 함수인 것과 아닌 것, 상수함수인 것, 일대일함수인 것을 구분하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻고 있음.
주어진 대응 그림에서 함수의 정의, 상수함수와 일대일함수의 성질을 유추할 수 있는지를 평가한다는 측면에서 '추론'을 평가함.
전체 정답률이 65.04%로 보통 수준의 문항이며, 변별도는 0.36으로 양호하게 나타남.
정답지 ④ 다음으로 오답지 ⑤와 ③에 대한 반응률이 높게 나타나 학생들이 일대일함수의 개념은 이해하고 있으나 함수와 상수함수 개념에 대한 이해도는 부족하다는 것을 알 수 있음.
답지 반응률 분포 곡선을 보면 정답지 ④의 분포가 1수준 중반부터 다른 오답지에 비해 높게 나타나고 있어 1수준 중반까지의 학생들에게 어려운 문제였음을 알 수 있음.
2수준 중반까지 오답지 ③에 대한 반응률이 다른 오답지에 비해 높게 나타나지만 2수준 중반 이후 오답지 ⑤에 대한 반응률이 다른 오답지에 비해 높게 나타나 **수준이 높은 학생이라도 함수에서의 대응에 대한 개념과 함수가 되기 위한 조건을 이해하는 데 어려움을 겪고 있다는 것을 알 수 있음.**

함수의 정의

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝 지어주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로 $x \to y$와 같이 나타낸다. 특히 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응 f를 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, 기호로 $f : X \to Y$와 같이 나타낸다.

함수에서 'X의 각 원소'라는 의미는 'X의 원소 x가 하나도 빠짐없이 모두'라는 뜻이고, 'Y의 원소가 오직 하나씩만 대응'이라는 의미는 'X의 원소 x 하나에 Y의 원소 y가 두 개 이상 대응될 수 없다.'라는 뜻이다. 즉, 함수는 정의역의 둘 이상의 원소가 공역의 한 원소에 대응할 수 있지만 정의역의 한 원소가 공역의 둘 이상의 원소에 대응할 수 없다.

$f : X \to Y$에서 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다. 또 함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x가 공역 Y의 원소 y와 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 x에서의 함숫값이라고 한다. 이때 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) | x \in X\}$를 함수 f의 치역이라고 한다. 즉 치역 $f(X)$는 공역 Y의 부분집합이므로 $f(X) \subset Y$이다.

함수 f의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우에 정의역은 함숫값 $f(x)$가 정의되는 실수 x의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

다항식에서 식을 간단히 했을 때 서로 같은 경우는 등호를 사용하였다. 그러나 함수의 식이 다르다 하더라도 두 함수가 같을 수 있다. 두 함수 f, g의 정의역과 공역이 각각 서로 같고, 정의역에 속하는 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로 $f = g$와 같이 나타낸다. 즉, 등식 $f(x) = g(x)$는 x에서의 함숫값이 같다는 뜻이며 등식 $f = g$는 두 함수가 서로 같다는 뜻이다.

그래프의 정의

$f : X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합 $\{(x,\ f(x)) | x \in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다. 특히 함수 f의 그래프는 함수 f의 정의역과 공역이 실수 전체의 집합의 부분집합일 때, 그래프의 각 원소 $(x,\ f(x))$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 그릴 수 있다. 즉 함수 f의 그래프를 그린다는 것은 그래프에 대한 기하적인 표시를 의미한다. 함수의 정의역의 원소의 개수가 유한개일 때, 그 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 유한개의 점으로 나타난다.

함수 f의 정의역의 각 원소 a에 대한 함숫값 $f(a)$는 오직 하나 존재한다. 따라서 함수 f의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x = a$와 오직 한 점에서 만난다.

여러 가지 함수

$f : X \to Y$에서 X에 속하는 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다. 일대일함수임을 보이려면 '$f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$'를 이용해도 된다.

함수 f가 일대일함수이고 치역과 공역이 같을 때 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

$f : X \to X$에서 정의역 X의 각 원소에 자기 자신을 대응할 때, 즉 $f(x) = x$일 때, 함수 f를 X에서의 항등함수라고 한다. 따라서 항등함수는 일대일대응이다.

$f : X \to Y$에서 정의역 X의 모든 원소에 공역 Y의 단 하나의 원소를 대응할 때, 즉 $f(x) = c$일 때, 함수 f를 상수함수라고 한다. 따라서 상수함수의 치역은 원소가 한 개로 이루어진 집합이며, 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 상수함수의 그래프는 y축에 수직인 직선으로 그려진다.

합성함수

공집합이 아닌 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$가 주어졌을 때, X의 각 원소 x에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 Y의 원소이다. 또 Y의 원소 $f(x)$에 대응하는 함숫값 $g(f(x))$는 Z의 원소이다. 즉 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 함수를 정의할 수 있는데, 이 함수를 f와 g의 합성함수라고 하며, 이것을 기호로 $g \circ f$와 같이 나타낸다. 즉 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.

또한 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$의 합성함수 $g \circ f: X \to Z$에서 x의 함숫값을 기호로 $(g \circ f)(x)$와 같이 나타낸다. 이때 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$가 성립한다. 따라서 f와 g의 합성함수를 $y = g(f(x))$와 같이 나타내기도 한다.

두 함수 f, g에 대하여 $g \circ f \neq f \circ g$이다. 즉 함수의 합성에 대하여 교환법칙은 성립하지 않는다.

또한, 세 함수 f, g, h에 대하여 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$가 성립한다. 즉 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다. 따라서 괄호를 생략하여 $h \circ g \circ f$로 나타내기도 한다.

역함수

일반적으로 $f: X \to Y$가 일대일대응이면 Y의 임의의 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x는 오직 하나 존재한다. 따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응하면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 새로운 함수를 함수 f의 역함수라고 하며, 이것을 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉 $f^{-1}: Y \to X,\ x=f^{-1}(y)$이다.

함수 $f: X \to Y$의 역함수가 존재하고 $x \in X,\ y \in Y$일 때, $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$가 성립하므로

$(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x,\ (f \circ f^{-1})(y)=f^{-1}(f(y))=f(x)=y$이다. 따라서 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다.

일반적으로 함수를 나타낼 때는 정의역의 원소를 x, 치역의 원소를 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$도 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$와 같이 나타낸다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하는 순서는 다음과 같다.

i) $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

ii) $y=f(x)$를 x에 대하여 정리하여 $x=f^{-1}(y)$의 꼴로 나타낸다.

iii) $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

일반적으로 두 함수 $f,\ g$의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1})^{-1}=f,\ (f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$이 성립한다.

역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 한 점을 $(a,\ b)$라고 하면 $b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에 대하여 점 $(b,\ a)$는 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 이때 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수와 그 역함수의 그래프의 교점

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 주어진 함수와 직선 $Y=X$의 교점을 이용하여 구할 수 있다. 이때 주어진 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 위에서만 만나는 것은 아니다. 아래의 명제가 참임을 증명해보자.

> ① 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점이 $(a,\ b)$이면 $(b,\ a)$도 교점이다.
>
> ② 함수 $f(x)$가 증가함수이면, 함수 $f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

① : $a=b$인 경우 자명하다. $a \neq b$일 때, $f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$이며 $g(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$이다.

② : 직선 $y=x$ 위에 존재하지 않는 어떠한 교점 $(a,\ b)$가 존재한다고 가정하자. ①이 성립하므로 점 $(b,\ a)$ 또한 두 그래프의 교점이다. 한편 $a \neq b$이므로 $a<b$ 또는 $a<b$이며, 증가함수의 정의에 따라 $a<b \Leftrightarrow f(a)=b<f(b)=a$ 또는 $a>b \Leftrightarrow f(a)=b>f(b)=a$인데 이는 모순이다.

한편, $f(x)$가 감소함수인 경우 직선 $y=x$ 위에 존재하지 않는 모든 교점은 ①에서 직선 $y=x$에 대해 대칭인 두 점씩 존재함을 확인할 수 있다.

명제 예시 문제 :

서로 다른 두 양수 α, β가 다음 조건을 만족할 때 $\alpha+2\beta$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$에 대하여 $f(n)<0$을 만족하는 자연수 n이 유일하게 존재하며 이 자연수 n의 값을 m이라 할 때 $f'(m)=-1$이다.

명제 예시 문제 해설 :

$f(n)=(n-\alpha)(n-\beta)^2<0$이면 $n\neq\beta$이고 $n-\alpha<0$이다.

우선 $\alpha<\beta$인 경우를 고려해보자. 이때 오직 $x<\alpha$에서만 $f(x)<0$이므로 $m<\alpha$이다.

한편 $m<\alpha$에서 $f'(m)>0$이다. 이는 주어진 조건 $f'(m)=-1$을 만족하지 않으므로 $\beta<\alpha$이다.

이때 $x<\beta$와 $\beta<x<\alpha$에서 $f(x)<0$이며 $x<\beta$에서 $f'(x)>0$이므로 $\beta<m<\alpha$이다.

또한 $\beta<m-1$인 경우 $f(m-1)<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다. $\therefore\beta\geq m-1$

동일하게 $\alpha>m+1$인 경우 $f(m+1)<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다. $\therefore\alpha\leq m+1$

따라서 $m-1\leq\beta<m<\alpha\leq m+1$이다.

이때 $f'(x)=(x-\beta)^2+2(x-\alpha)(x-\beta)$에서 $f'(m)=(m-\beta)^2+2(m-\alpha)(m-\beta)$이다.

즉 $m-\alpha=A,\ m-\beta=B$라 할 때 $-1\leq A<0,\ 0<B\leq 1,\ B^2+2AB=-1$을 만족한다.

이때 $2AB=-1-B^2$에서 $B>0$이므로 $-1\leq A=\dfrac{-1-B^2}{2B}<0,\ -2B\leq-1-B^2<0$이다.

한편 $-2B\leq-1-B^2$에서 $B^2-2B+1=(B-1)^2\leq 0$이므로 $B=1$이며 이때 $A=-1$이다.

$\therefore\ \beta=m-1,\ \alpha=m+1$. 이때 $\beta>0$에서 $m>1$이다.

한편 $m>2$인 경우 $f(m-2)<0$이므로 $f(n)<0$을 만족하는 자연수 n이 적어도 두 개 존재한다.

따라서 $m=2,\ \beta=1,\ \alpha=3$이다. $\therefore\alpha+2\beta=5$

명제 예시 문제 comment :

주어진 조건에서 $f(n)<0$이고 $f'(n)=-1$을 만족하는 자연수 n의 값이 m으로 존재합니다.

이때 $\alpha<\beta$인 경우 $f(x)<0$이면 $f'(x)>0$임을 관찰하는 것이 바람직합니다.

따라서 $\beta<\alpha$인 경우를 확인하면 α와 β의 범위를 m에 대하여 나타낼 수 있습니다.

이때 $f'(m)$의 값을 곱의 미분법을 활용하여 m, α, β에 대하여 나타낼 수 있습니다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수의 곱의 미분법에 의하여 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다.

한편 α와 β의 범위에서 $m-\alpha$와 $m-\beta$의 범위 또한 구할 수 있습니다.

$f'(m)=(m-\beta)^2+2(m-\alpha)(m-\beta)=-1$에서 $m-\alpha$와 $m-\beta$를 치환하여 α와 β의 값을 m에 대하여 구할 수 있습니다. 이때 $\beta>0$이므로 $m>1$임을 관찰할 수 있습니다.

공통부분이 있는 식의 경우에는 그 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 관찰하는 것이 편리하다. 공통부분을 하나의 문자로 바꾸는 행위를 치환이라 한다.

이때 주어진 조건을 만족하는 자연수 n의 값이 유일하게 존재합니다.

따라서 $m>2$인 경우 주어진 조건을 만족하지 않음을 확인하는 것이 바람직합니다.

즉 m의 값은 2이므로 α와 β의 값을 구할 수 있습니다.

함수 예시 문제 :

치역이 0이 아닌 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 $g(f(x))=x$를 만족할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$의 그래프는 $x<1$과 $x>1$에서 각각 일차함수의 그래프의 일부이다.
(나) 방정식 $f(x)=g(x)$가 오직 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$만을 가지며 $\alpha+\gamma=2\beta$이다.

$4\{g(x)\}^2-g(x)$가 연속함수일 때 γ의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$이다.)

함수 예시 문제 해설 :

함수 $f(x)$가 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다. 즉, 함수 $f(x)$의 치역과 공역은 동일하며 함수 $f(x)$의 역함수의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

$f(x)$는 증가함수이거나 감소함수여야 일대일대응일 수 있는데, $\lim_{x\to 1-} f(x) \neq \lim_{x\to 1+} f(x)$라 가정하자.

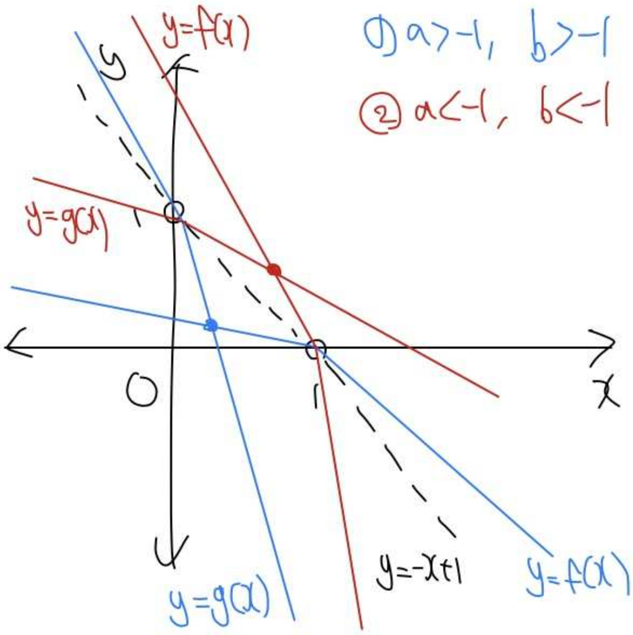
좌극한값과 우극한값 사이의 열린구간에서 함수 $f(x)$의 역함수가 정의되지 않아야 하므로 이는 모순이다. 즉, $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$이며 $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$이다. 따라서 두 상수 a, b에 대하여

$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & (x<1) \\ b(x-1) & (x>1) \end{cases}$이라 할 때 함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로 $ab>0$이다.

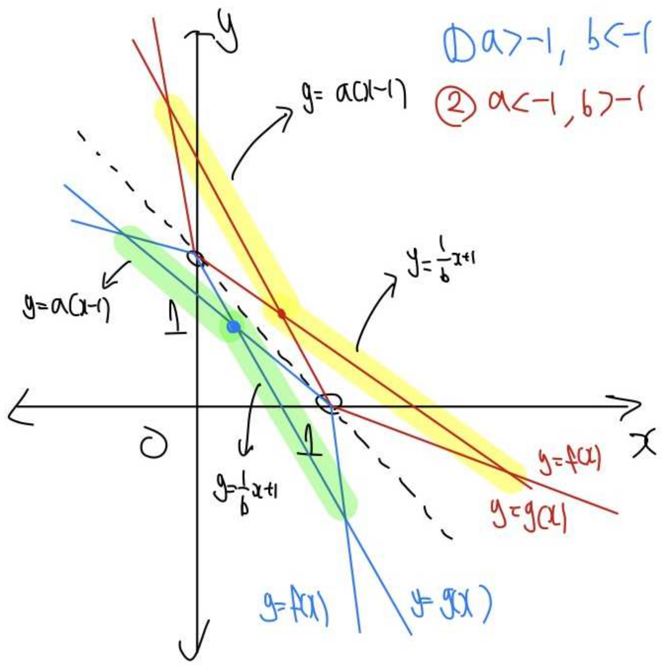
$g(f(x)) = x$이므로 $x \neq 0$에서 함수 $g(x)$는 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}x+1 & (x<0) \\ \dfrac{1}{b}x+1 & (x>0) \end{cases}$이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 정의되어있음을 유의하며 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 관찰하자.

$a<0$일 때 $x \neq 0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다고 가정하자.



$(a+1)(b+1) > 0$일 때 방정식 $f(x)=g(x)$은 오직 하나의 실근만을 가지게 된다. (꺾이는 점을 기준으로 두 반직선이 각각 $y=-x+1$의 위아래에 존재하게 되기 때문이다.) $\therefore (a+1)(b+1) \geq 0$



이때 $f(\alpha)=\gamma$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\alpha$에서 $\alpha+\gamma=2\beta$일 때 세 점 $(\alpha,\ \gamma)$, $(\beta,\ \beta)$, $(\gamma,\ \alpha)$는 한 직선 위에 존재한다. (이 직선은 $y=-x+2\beta$이다.) 이때 $a \neq \frac{1}{b}$라면 세 점이 한 직선위에 존재할 수 없으므로

$a=\frac{1}{b}$이고 이 경우 방정식 $f(x)=g(x)$는 $a=\frac{1}{b}=-1$일 때 실근의 개수가 무수히 많으며

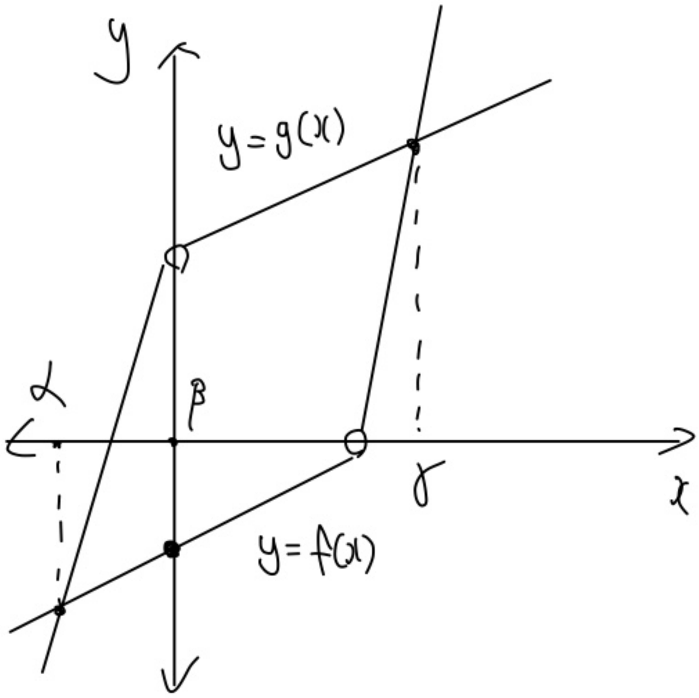
$a=\frac{1}{b}\neq-1$일 때 사이값 정리에 의하여 구간 $(0,\ 1)$에서 오직 한 실근만을 가지므로 모순이다.

그러므로 $a<0$이라면 α, β, γ 중 하나는 0이어야 하는데 사이값 정리에 의하여 (혹은 그래프를 통해 직관적으로) $\alpha<0<\beta<1<\gamma$이므로 주어진 조건을 만족할 수 없다. $\therefore a>0$

$a>0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근은 $y=x$ 위에 존재한다. 즉, $x>1$에서 실근의 개수는 최대 1이며 $x<0$에서 실근의 개수는 최대 1이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서는 실근을 가질 수 없으므로 $x\neq0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$에서 두 실근을 가지고 $f(0)=g(0)$일 때 주어진 조건을 만족한다.

즉, $x>1$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지기 위해 $b>1$이며 $x<0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지기 위해 $a<1$이다.

따라서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이며 이차함수 $h(x)=4x^2-x$에 대하여 $h(g(x))$가 연속함수이므로 $h(x)$의 대칭축이 $x=\frac{1}{8}$임에 따라 $\lim_{x\to 0}g(x)+g(0)=\frac{1}{4}$이다. 즉, $\lim_{x\to 0}g(x)=1$에서 $g(0)=-\frac{3}{4}$이므로 $f(0)=-\frac{3}{4}$이다. $\therefore a=\frac{3}{4}$. 이때 $\frac{3}{4}(x-1)=x$에서 $\alpha=-3$이고 $\beta=0$에서 $\gamma=3$이다. $\therefore \gamma=3$