제 2 교시

수학 영역(B 형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=4^x+2$에 대하여, $f'(1)$의 값은? [2점]

① $10\ln 2$ ② $8\ln 2$ ③ $6\ln 2$ ④ $4\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 7,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점이 y축 위에 있다. $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 수열 a_n이

$$\sqrt{2n-3} < (2n+1)a_n < \sqrt{2n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

5. 무리방정식 $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x+6}=3$의 모든 실근의 곱은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

6. 함수 $y=-4\sin 2x+6\cos^2 x$의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

7. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B는 서로 배반사건이고

$$2P(A^C)=P(B^C),\ P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $P(A)-P(B)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

8. 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{ak}{n})=a$을

만족시키는 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ④ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ⑤ 1

9. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(5,7,-2)$, $\mathrm{B}(2,4,1)$이 있다. 직선 AB와 평행하고 점 $(1,6,1)$을 지나는 직선이 있다. 이 직선이 xy평면과 만나는 점의 좌표는 $(a,b,0)$이다.
$a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10. 좌표평면에서 역변환이 존재하는 일차변환 f에 의해 점 $(-1,1)$이 점 $(1,2)$로 옮겨가고, 일차변환 f^{-1}에 의해 점 $(a,1)$이 점 $(-1,0)$으로 옮겨간다.
합성변환 $f\circ f$에 의해 점 $(1,0)$이 점 $(b,0)$으로 옮겨질 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 어느 고등학교에서 수능 응시 후 수시 최저 등급을 맞춘 학생의 비율이 20%라고 한다. 이 고등학교에서 학생 25명을 임의 추출할 때, 수시 최저 등급을 맞춘 학생이 3명 이상이고 6명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6826 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때,

$$S_n + \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n!} \quad (n \ge 2)$$

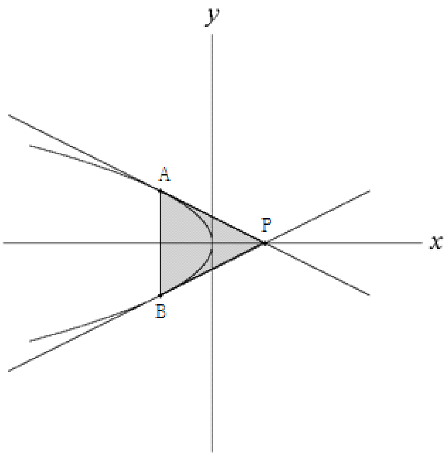
을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 n을 곱하면
>
> $$nS_n + a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad (n \ge 2)$$
>
> 이다. $S_n - S_{n-1} = a_n$이므로
>
> $$(n+1)S_n - S_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (n \ge 2)$$
>
> 이다. $b_n = S_n \times (n+1)!$이라 하면 $b_2 = 4$이고
>
> $$b_n = b_{n-1} + \boxed{(가)} \quad (n \ge 3)$$
>
> 이다. 따라서 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$S_n = \boxed{(나)} \quad (n \ge 2)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(5)}$의 값은? [3점]

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

〔13~14〕 양의 실수 k에 대하여 점 $\mathrm{P}(k, 0)$에서 포물선 $y^2 = -x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B 라고 하자. 삼각형 PAB 의 넓이를 $S(k)$이라고 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 삼각형 PAB 가 정삼각형이 되도록 하는 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{5}{6}$

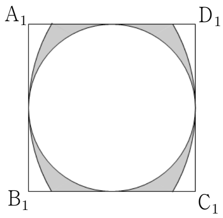
14. $\lim_{k \to +0} \frac{S(k)}{k\sqrt{k}}$ 의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

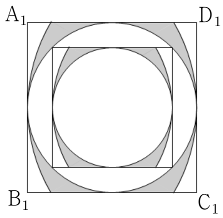
15. $[0, k]$에서 정의되는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 원점을 지나는 일차함수이다. $V(X)=2$일 때, k의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

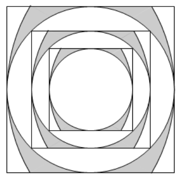
16. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형에 내접하는 원을 그리고, 선분 A_1B_1의 중점을 중심으로 하고 중심각의 크기가 예각이며 중심을 제외한 나머지 두 꼭짓점이 선분 A_1D_1와 선분 B_1C_1 위에 있는 부채꼴과 선분 C_1D_1의 중점을 중심으로 하고 중심각의 크기가 예각이며 중심을 제외한 나머지 두 꼭짓점이 선분 A_1D_1와 선분 B_1C_1 위에 있는 부채꼴을 그린다. 두 부채꼴의 호와 선분 A_1D_1, 선분 B_1C_1으로 둘러싸인 도형에서 내접하는 원을 제외한 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 원에 외접하는 정사각형과 변이 모두 평행 또는 수직하도록 원에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3

…

① $\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}-8$ ② $\frac{2}{3}\pi+8\sqrt{3}-16$ ③ $\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}-4$
④ $\frac{4}{3}\pi+4\sqrt{3}-8$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi+8\sqrt{3}-16$

17. 분수부등식 $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{k}{x-k}\geq 1$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2개일 때, 가능한 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

18. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2+2AB=E,\ AB(E+2B^2)=O$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A+2B$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. A^2-2B의 역행렬은 A^2+2B이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

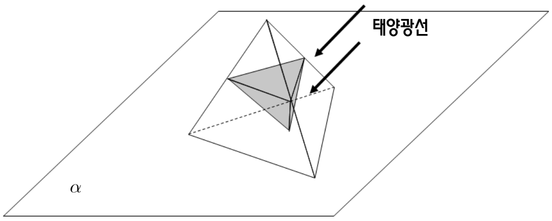
19. 정의역이 $\{x \mid 0 < x < 2\}$인 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 미분 가능하고 함숫값이 양수이다. 함수 $f(x)$가

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \ln \frac{1+f(x)}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(\sqrt{2})$의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $2-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2+\sqrt{2}$

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 투명한 정사면체 P가 평면 α와 한 밑면을 공유하며 놓여있다. 평면 α에 포함되지 않는 정사면체의 세 모서리의 중점과 평면 α에 포함되는 밑면의 무게중심을 이어서 만든 불투명한 사면체를 사면체 Q라고 하자.
태양광선이 그림과 같이 정사면체 P의 평면 α에 포함되지 않는 한 밑면에 수직인 방향으로 비출 때, 사면체 Q에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? [4점]



① $\frac{11\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

21. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라고 하자. 3 이상의 자연수 n에 대하여 $f(x)+f(x^{-n})=1$을 만족시키는 x값 중에서 n번째로 작은 값을 a_n이라고 하자.

$\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{f(a_k)}$의 값은? [4점]

① 22 ② $\frac{45}{2}$ ③ 23 ④ $\frac{47}{2}$ ⑤ 24

단답형

22. $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 학교에서 가정통신문으로 방과 후 학교 희망 수업을 조사하였다. 남학생이 30%이고 여학생이 70%인 1학년 100명의 학생들은 모두 수학 또는 영어 수업 중 하나를 선택하였다. 어떤 학생이 수학 수업을 선택한 학생일 때 그 학생이 남학생일 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 어떤 학생이 여학생일 때 그 학생이 영어 수업을 선택한 학생일 확률은 $\frac{6}{7}$이다.
영어 수업을 선택한 남학생은 n명일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

24. 첫 항이 3인 등차수열 a_n에 대하여 등차수열의 합

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$이라고 할 때, $S_{15} = 2S_{10}$이다.

a_{15}의 값을 구하시오. [3점]

25. 어떤 별의 절대 등급을 m, 실제 밝기를 l이라고 할 때, 절대 등급과 실제 밝기 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$m = 5\log\frac{1}{\sqrt{l}}$$

별 A의 절대 등급이 12일 때의 실제 밝기가 0.5T이고, 별 B의 절대 등급이 a일 때의 실제 밝기는 50T이다. a의 값을 구하시오.

(단, T는 상수이다.) [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오. [4점]

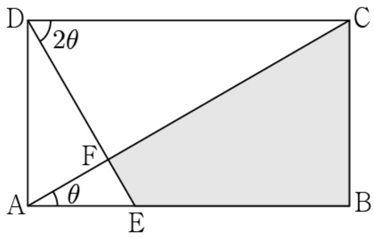
(가) $xyzw = 100$
(나) $|xy| \neq zw$

27. 좌표평면 위에 원 $\mathrm{P}: x^2+y^2-2x-10y+10=0$가 있다. 점 $\mathrm{A}(-1,5)$를 지나고 P과 접하는 원을 Q라고 하자. Q의 중심이 나타내는 곡선이 y축과 만나는 두 교점의 y좌표를 각각 α, β라고 하자. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]

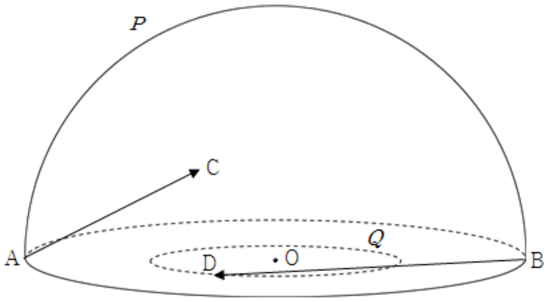
28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AB위에 $\angle\mathrm{CDE}=2\theta$인 점 E를 잡고, 선분 DE와 선분 AC의 교점을 F라고 하자.

사각형 BCFE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=a$이다.

$300a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



29. 그림과 같이 좌표공간에 반구 P: $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$와 원 Q : $x^2+y^2=1$, $z=0$이 있다.
네 점 A, B, C, D에 대해 선분 AB는 반구의 밑면인 원의 지름이고, 점 C, D는 각각 반구 P, 원 Q위에 있다.
네 점은 다음 조건을 만족시킨다.



$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2$ (단, O는 원점이다.)

선분 CD의 xy평면으로의 정사영의 길이가 최소일 때, $\overline{CD}$와 xy평면이 이루는 각도를 θ라고 하자.
$60\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 n과 양의 상수 k에 대해 정의역이 양수인 두 함수 $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x}$, $g_n(x) = |f_n(x) - f_n(k)|$가 있다. $g_n(x)$가 모든 양수 x에 대해 미분 가능하도록 하는 서로 다른 k의 개수를 a_n이라고 할 때, b_n을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n = \begin{cases} (k\text{의 최댓값}) & (a_n > 1) \\ 1 & (a_n \leq 1) \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{m} \ln b_k \leq 99$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오.

[4점]

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.