[권구승/한성은 모의고사]

❙ 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (1/4) ❙

권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

보통은 무슨 일이든 시간과 노오력을 갈아넣은만큼 성과가 나오더군요.
여러분도 원하는게 있다면 뭐든 갈아 넣읍시다.

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

노골적인 6월 변형이면서 살짝 구색 맞추기.
평가원을 반영하여 최대한 퀄을 낮췄습니다.

hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 32×2^{-3}의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 12

2. $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{e^{4x} - e^{2x}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4 = a_2 + 6$$

일 때, a_{10}의 값은? [2점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

4. 6개의 문자 a, a, b, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^2+5n^2}{a_n^2+n^2}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_9 a)$, $(3,\ \log_3 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

7. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. $\int_1^e \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$
④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

9. 함수

$$f(x) = \log_2(2x+k)$$

가 닫힌구간 $[0,\ 14]$에서 최솟값 2, 최댓값 M을 갖는다. $k+M$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x = t - \sin t,\ \ y = t - \cos t$$

일 때, π초 후의 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

11. $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}\ln 2$ ② $-\ln 2$ ③ $\frac{1}{2}\ln 2$
④ $\ln 2$ ⑤ $\frac{3}{2}\ln 2$

12. 자연수 n이 $2 \le n \le 10$일 때, x에 대한 방정식

$$x^n = -n^2+15n-50$$

이 적어도 하나의 실근을 갖고, 모든 실근의 합이 0 이하가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 32 ② 30 ③ 28
④ 26 ⑤ 24

13. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = 2a_n + 1 \\ a_{2n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4 + a_5 = 18$일 때, $a_{14} + a_{15}$의 값은? [3점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

14. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고

$$\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=0)} = 9, \quad \sigma(2X-1) = 4$$

일 때, n의 값은? [4점]

① 18 ② 15 ③ 12 ④ 9 ⑤ 6

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$$

를 만족시킬 때, 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}=(n-1)a_1 a_n \ \cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때 (좌변)$=$(우변)$=a_1a_2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}=(k-1)a_1 a_k \ \cdots \ (**)$$

이다. $n=k+1$일 때

$$\sum_{i=1}^{k} a_i a_{i+1}=(k-1)a_1 a_k+a_k a_{k+1} \ \cdots \ (**)$$

이다. 한편 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다. 이 수열의 공차를 d라 하자. 등식 $(**)$의 우변에서

$$(k-1)a_1a_k+a_ka_{k+1}=a_1a_ka_{k+1}\left\{\frac{k-1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_1}\right\}$$

$$=a_1a_ka_{k+1}\left\{(k-1)\left(\frac{1}{a_k}+d\right)+\left(\frac{1}{a_k}-\boxed{(가)}\times d\right)\right\}$$

$$=a_1a_ka_{k+1}\left\{\frac{k-1}{a_k}+\frac{1}{a_k}\right\}$$

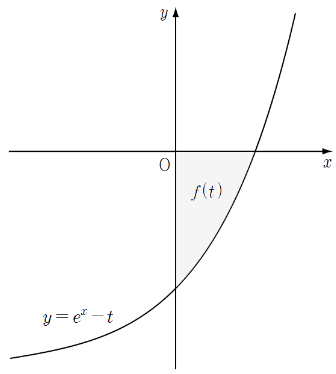
$$=\boxed{(나)}\times a_1a_{k+1}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(7)+g(6)$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

16. 1보다 큰 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x-t$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(t)$라 하자. $f'(e)$의 값은? [4점]



① 1 ② $\sqrt{e}$ ③ e ④ $e\sqrt{e}$ ⑤ e^2

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드가 이웃하거나 2가 적혀 있는 카드와 3이 적혀 있는 카드가 이웃할 확률은? [4점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{19}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

18. 두 곡선 $y=|\log_2 x|$과 $y=2^{-x}$이 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1 < x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $2y_2 < 1 < 2y_1$
ㄴ. $x_2 < x_1 + 1$
ㄷ. $\sqrt{2} < 8y_1y_2 < 3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. D고등학교 학생들의 하루 공부 시간은 평균이 10분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 임의로 선택한 D고등학교 학생 한 명의 하루 공부 시간이 12분 이상이거나, D고등학교 학생 중 4명을 임의추출하여 구한 하루 공부 시간의 표본평균이 12분 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

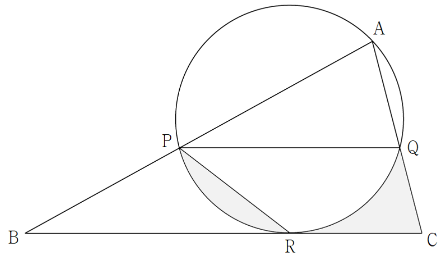
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

① 0.1104 ② 0.2346 ③ 0.3426
④ 0.4204 ⑤ 0.5796

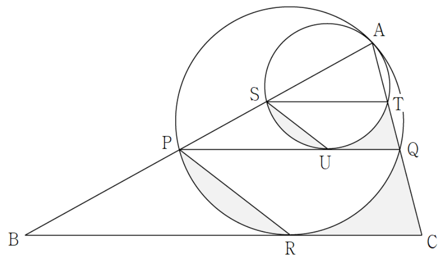
20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{4}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ는 직선 BC와 평행하며 세 점 A, P, Q를 지나는 원이 직선 BC와 점 R에서 접한다. 두 선분 CQ, CR과 호 QR로 둘러싸인 부분과 선분 PR과 호 PR로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AP 위의 점 S, 선분 AQ 위의 점 T에 대하여 직선 ST는 직선 PQ와 평행하며 세 점 A, S, T를 지나는 원이 직선 PQ와 점 U에서 접한다. 두 선분 QT, QU와 호 TU로 둘러싸인 부분과 선분 SU와 호 SU로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

① $\frac{\sqrt{15}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{15}}{14}$
④ $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{14}$

21. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad b_n = 2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$$

이다. $100b_m$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 180 ② 170 ③ 160
④ 150 ⑤ 140

단답형

22. 함수 $2\sin x+3$의 최댓값을 구하여라. [3점]

23. 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^2의 계수가 45일 때, 자연수 n의 값을 구하여라. [3점]

24. 반지름의 길이가 10인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{4}{5}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하여라. [3점]

25. 함수 $e^x(x^2+4x+a)$의 극값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하여라. [3점]

26. 이산확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

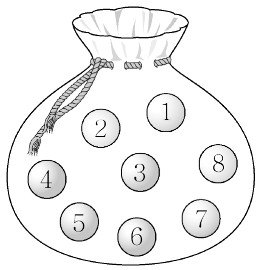
X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

이산확률변수 Y가 갖는 값은 1, 3, 5이고

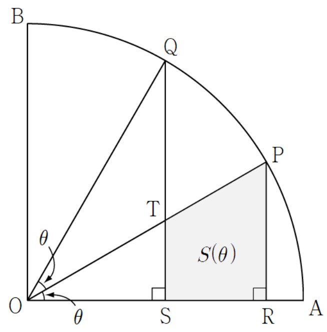
$$\mathrm{P}(Y=2i-1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+b \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, $\mathrm{E}(3Y+1)$의 값을 구하여라.
(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

27. 주머니에 숫자 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 공 8개가 들어 있다. A가 이 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내고, B가 남아 있는 6개의 공 중에서 2개의 공을 임의로 꺼낸다. 이 시행에서 A가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 4의 배수일 때, B가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle \mathrm{POA} = \angle \mathrm{POQ} = \theta$인 호 AB 위의 두 점 P, Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, S, 두 직선 OP, QS의 교점을 T, 사각형 SRPT의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $60a$의 값을 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

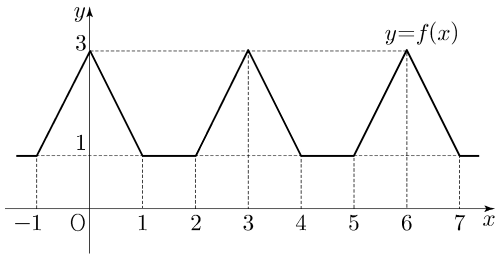


29. 검은색 볼펜 3자루, 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 1자루, 노란색 볼펜 1자루가 있다. 이 6자루의 볼펜을 4명의 회사원에게 남김없이 나누어줄 때 각 회사원이 적어도 1개의 볼펜을 받는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(\log_2(x+h))-f(\log_2(x-h))}{2h}\right|$$

$x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(1,\ 100)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$(n은 자연수)라 할 때, $n+32\sum_{k=1}^{n}\{\ln 2\times g(a_k)\}$의 값을 구하여라. [4점]



[권구승/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(1/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	②	03	①	04	④	05	⑤
06	③	07	⑤	08	①	09	②	10	④
11	③	12	①	13	②	14	①	15	②
16	①	17	③	18	⑤	19	④	20	③
21	①	22	5	23	10	24	16	25	5
26	9	27	12	28	90	29	388	30	33

COMMENT 15

$f(k)=k-1,\ g(k)=k$

COMMENT 18

기역 : 곡선 $y=2^{-x}$가 $x=1$과 만나는 점의 y좌표가 $\frac{1}{2}$이다.

니은 : 점 $(x_1,\ y_1)$은 직선 $y=x$ 위의 점이다. 점 $(x_2,\ y_2)$는 $(x_1+1,\ y_1)$의 왼쪽의 왼쪽 아래에 있다.

디귿 : 직선 $y=x$와 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$과 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$를 지나는 직선의 교점이 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이므로 $x_1=y_1<\frac{3}{4}$이다.

왼쪽 : $2^{-\frac{5}{2}}<2^{-x_1}\times 2^{-x_2}$에서 $x_1+x_2<\frac{5}{2}$이다. $x_2<x_1+1$이므로 $x_1<\frac{3}{4}$이면 각이다. ㅇㅋ

오른쪽 : $y_2<\frac{1}{2}$이므로 $y_1<\frac{3}{4}$이면 각이다. ㅇㅋ

COMMENT 19

한 명의 하루 공부 시간이 12분 이상일 확률은 $\mathrm{P}(Z\geq 0.5)=0.31$이고

표본평균 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르므로 $\overline{X}\geq 12$일 확률은 $\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.16$이다.

여사건 돌려서 $1-(1-0.31)(1-0.16)$ 해도 좋고, $0.31+0.16-0.31\times 0.16$ 해도 좋다.

COMMENT 20

삼각형 ABC에서 코사인 돌리면 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이다.

$\overline{\mathrm{BP}}=4t,\ \overline{\mathrm{CQ}}=2t$라 두자. 방멱 돌리면 $\overline{\mathrm{BR}}=4\sqrt{t},\ \overline{\mathrm{CR}}=2\sqrt{t}$ 이므로 $t=\frac{4}{9}$이다.

$\overline{\mathrm{BR}}:\overline{\mathrm{CR}}=2:1$이므로 AR은 각 BAC의 이등분선이다. $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$이고 R_1의 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{4\sqrt{15}}{27}$이다.

닮음비는 $1:(1-t)$이므로 $9:5$, 넓이비는 $81:25$, 공비는 $\frac{25}{81}$이다.

COMMENT 21

$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$이고 b_n은 $\frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{8}{7},\ \frac{7}{8},\ \cdots$이다.

$100b_m$이 100 이하의 자연수가 되려면 분모가 짝수인 100의 약수가 되어야 한다.

가능한 분모는 2, 4, 10, 20, 50, 100이고 m은 1, 3, 9, 19, 49, 99이다.

COMMENT 27

$\mathrm{P}(\mathrm{A}$가 4의 배수$)=\frac{1}{2}$이고, $\mathrm{P}(\mathrm{A}$가 4의 배수$\cap\mathrm{B}$가 홀수$)=\frac{1}{7}$이다. 여사건을 이용하여 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{B}\text{가 홀수}|\mathrm{A}\text{가 4의 배수})=1-\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{가 4의 배수}\cap\mathrm{B}\text{가 홀수})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{가 4의 배수})}=\frac{5}{7}$$

이다.

COMMENT 28

$\overline{OS}=\cos2\theta$이므로 $\overline{TS}=\cos2\theta\times\tan\theta$이다. $\overline{PR}=\sin\theta$이고 $\overline{RS}=\cos\theta-\cos2\theta$이므로

사다리꼴 SRPT의 넓이는 $\dfrac{\sin\theta+\cos2\theta\tan\theta}{2}(\cos\theta-\cos2\theta)$이다.

$\dfrac{\sin\theta+\cos2\theta\tan\theta}{2}$는 대충 $\dfrac{\theta+\theta}{2}=\theta$이고 $\cos\theta-\cos2\theta=(1-\cos2\theta)-(1-\cos\theta)$는 대충 $\dfrac{1}{2}(2\theta)^2-\dfrac{1}{2}\theta^2=\dfrac{3}{2}\theta^2$이다.

COMMENT 29

검은색이 아닌 색 볼펜을 몇 명에게 나눠주는지로 분류하자.

Case1) 모든 색 볼펜을 한 명에게 줄 때 : 회사원 선택 4가지, 검은색 나눠주는 방법 $1(={}_4H_0)$가지.

Case2) 색 볼펜을 두 명에게 줄 때 : 색 볼펜 분할 3가지, 회사원 선택 4×3가지, 검은색 나눠주는 방법 $4(={}_4H_1)$가지.

Case2) 색 볼펜을 세 명에게 줄 때 : 회사원 선택 $4\times3\times2$가지, 검은색 나눠주는 방법 $10(={}_4H_2)$가지.

COMMENT 30

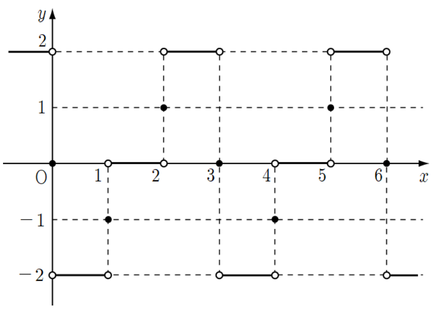
함수 $f(t)$가 $t=\log_2 x$에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(\log_2(x+h))-f(\log_2(x-h))}{2h}=\frac{f(\log_2(x+h))-f(\log_2(x-h))}{\log_2(x+h)-\log_2(x-h)}\times\frac{\log_2(x+h)-\log_2(x-h)}{2h}$$ 에서

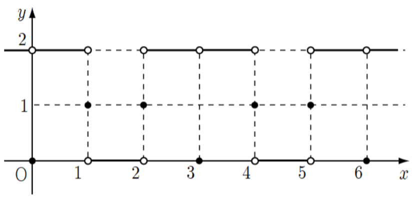
$\dfrac{f(\log_2(x+h))-f(\log_2(x-h))}{\log_2(x+h)-\log_2(x-h)}$는 $f'(\log_2 x)$로, $\dfrac{\log_2(x+h)-\log_2(x-h)}{2h}$는 $\dfrac{1}{\ln2\times x}$로 수렴한다.

$f(t)$가 미분가능하지 않을 때는 $f'(\log_2 x)$ 대신 그거 있잖아, 대칭미분계수, 그걸로 수렴한다.

우선 $f(x)$의 대칭미분계수의 그래프는 [그림1]과, 절댓값 때린 것은 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

절댓값을 대충 밖으로 뺄 수 있고, $g(x)$는 $\log_2 x$의 값이 정수일 때 불연속이다.

$x=a$에서 불연속인 a의 값은 $\log_2 a=1$, $\log_2 a=2$, $\log_2 a=3$, $\log_2 a=4$, $\cdots$일 때이므로

열린구간 $(1,\ 100)$에는 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, $a_4=16$, $a_5=32$, $a_6=64$의 여섯 개가 존재한다.

$g(a_1)=\dfrac{1}{\ln2\times2}$, $g(a_2)=\dfrac{1}{\ln2\times4}$, $g(a_3)=0$, $g(a_4)=\dfrac{1}{\ln2\times16}$, $g(a_5)=\dfrac{1}{\ln2\times32}$, $g(a_6)=0$이다.

구하는 값은 $6+32\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}\right)=33$이다.